Niveau(x) d'enseignement : 7 Numéro EDUQ : 9570387
Centre d'intérêt : 841

Reumont, André.

Projet Aromath : projet d'aide relative aux ordinateurs en mathématiques / André Reumont, Pierre Reumont. -- [Montréal] : Collège de Maisonneuve, 1994.
109 p. en pag. multiple : ill. ; 28 cm.

Bibliogr. à la fin du v.

ISBN 2-920820-16-8

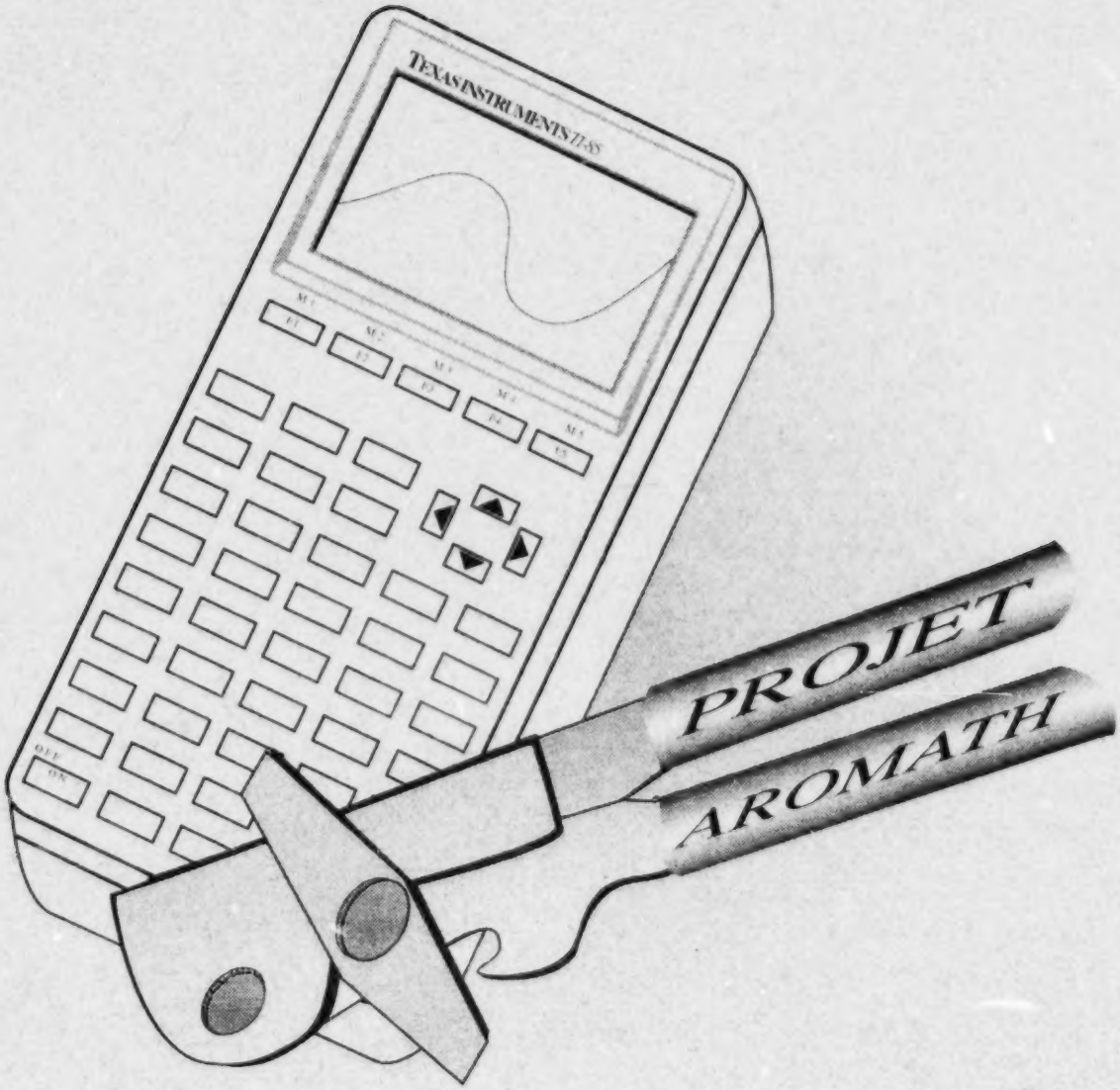
Vedette(s)-secondaire(s) : Reumont, Pierre * Collège de Maisonneuve

Descripteur(s) : Mathématiques * Technologie * Utilisation de l'ordinateur * Formation des enseignants * Programme de formation * Collégial (Ordre d'enseignement)

Identificateur(s) de sujet : Calculateur graphique

Ce rapport d'étape d'un projet qui doit se dérouler sur deux ans traite des tendances technologiques en enseignement des mathématiques et de la dynamique qui s'y rattache (chapitre 1); du choix des outils technologiques en mathématiques (chapitre 2); des exemples d'activités utilisant le calculateur graphique (chapitre 3); du programme de formation des enseignants qui sera mis sur pied pour les membres du département de mathématiques du Collège de Maisonneuve au semestre d'hiver 1995 (chapitre 4); des réflexions quant à l'impact éventuel des technologies sur différents éléments de l'enseignement des mathématiques (chapitre 5); une bibliographie regroupant les éléments les plus pertinents de l'ensemble des ouvrages consultés.

Collège de
Maisonneuve



André Reumont et Pierre Reumont

Juin 1994

95-70387

PROJET AROMATH

PROJET d'Aide Relative aux Ordinateurs en MATHématiques

Auteurs
André Reumont
Pierre Reumont

Réalisation
de la couverture et des séparateurs
Brigitte Grenier

Édition électronique
André Reumont
Pierre Reumont

Imprimerie
Impressions KL
St-Mathieu de Beloeil

Dépôt légal: 3e trimestre 1994
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

ISBN 2-920820-16-8

AVANT-PROPOS

Ce rapport présente les résultats d'une recherche subventionnée par la Direction Générale de l'Enseignement Collégial dans le cadre du programme d'adaptation aux technologies et aux programmes d'étude. Le PROJET AROMATH (pour Aide Relative aux Ordinateurs en MATHématiques) est un projet qui doit se dérouler sur deux ans (en 93-94 et 94-95). Précisons que les objectifs généraux du projet sont:

pour l'année scolaire 93-94:
s'informer des orientations de nature technologique en enseignement des mathématiques, acquérir une formation portant sur les logiciels de manipulation symbolique et les calculateurs graphiques et faire le choix d'outils technologiques servant à l'enseignement et l'apprentissage.

pour l'année scolaire 94-95:
sensibiliser les membres de notre département à la dimension technologique de l'enseignement et l'apprentissage de leur discipline puis concevoir, réaliser et superviser un programme de formation approprié quant à l'utilisation pédagogique d'un calculateur graphique.

Le présent rapport est donc un rapport d'étape, il traite d'abord des tendances technologiques en enseignement des mathématiques et de la dynamique qui s'y rattache (chapitre 1), des outils technologiques que nous suggérons d'utiliser en mathématiques (chapitre 2), des exemples d'activités illustrant à la fois le potentiel de ces outils et la philosophie avec laquelle nous espérons les utiliser (chapitre 3), du programme de perfectionnement que nous entendons mettre sur pied pour les membres de notre département au semestre Hiver 95 (chapitre 4), des réflexions quant à l'impact éventuel des technologies sur différents éléments de notre enseignement (chapitre 5) et, finalement, une bibliographie (chapitre 6) regroupant uniquement les éléments les plus pertinents de l'ensemble des ouvrages consultés.

Ce rapport s'adresse d'abord aux collègues de notre département mais nous croyons qu'il peut aussi intéresser tout professeur de mathématiques à l'ordre collégial. Ainsi, par sa diffusion au plan provincial, nous espérons que le PROJET AROMATH incitera à une utilisation pertinente de la technologie, apportera une nouvelle saveur à l'enseignement des mathématiques et favorisera le renouveau pédagogique tant souhaité dans la réforme en Sciences de la nature.

Bonne lecture!

André Reumont, Pierre Reumont.

Afin d'alléger ce texte, le générique masculin sera utilisé et ce, sans aucune intention de discrimination.

TABLE DES MATIÈRES

1. Un virage technologique en mathématiques... encore un?
- 1.1 Mathématiques et technologies: la poule et l'oeuf
- 1.2 Enseignement des mathématiques et technologies
  - Situation actuelle
- 1.3 La véritable question
  - Aspects positifs de l'intégration des technologies à l'enseignement
    - L'apprentissage
    - L'intégration des apprentissages
    - La visualisation
    - La démarche mathématique de l'étudiant
    - L'apprentissage coopératif

2. Choix des outils technologiques
- 2.1 Critères de choix
  - Besoins sur le plan mathématique
    - L'aspect numérique
    - L'aspect graphique
    - L'aspect symbolique
    - La programmation
  - Facilité d'apprentissage
  - Accessibilité
  - Documentation et matériel de soutien
  - Coût
- 2.2 Choix retenus
  - Micro-ordinateur ou super-calculateur à affichage graphique?
  - Le super-calculateur choisi
  - Le logiciel de manipulation symbolique à choisir
- 2.3 L'approche-programme
  - Quelques outils technologiques communs en Sciences de la nature?
  - Des éléments intégrateurs pour les étudiants et pour les professeurs

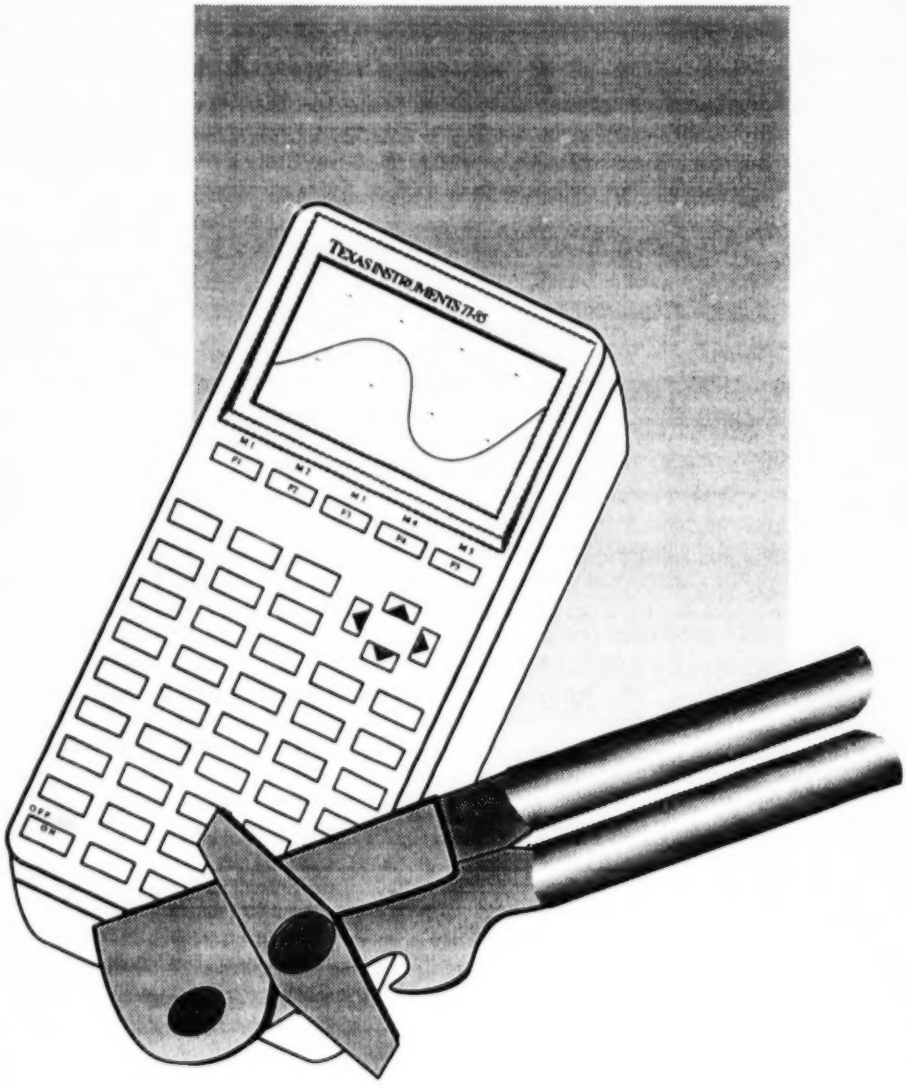
3. Exemples d'activités utilisant le calculateur graphique
- 3.1 Remarques préliminaires
- 3.2 En ligne droite dans la courbe
- 3.3 Règle de l'Hospital: il faut remonter la pente
- 3.4 À la dérive sur les vagues de la fonction sinus
- 3.5 Newton: à la recherche de ses racines
- 3.6 Cosinus, Newton, MacLaurin et Taylor
- 3.7 Le tour de π
- 3.8 Un peu de lumière sur Euler et son nombre
- 3.9 La corde, le carré et le cercle: une excursion en probabilités
- 3.10 L'hexacube
- 3.11 La puissance qui donne des complexes
- 3.12 Binormale, vous avez dit?
- 3.13 Éclipse de cercle: une autre excursion en probabilités
- 3.14 Petit glossaire du TI-85

4. Formation des professeurs
- 4.1 Besoins justifiant la mise sur pied du programme de formation
- 4.2 Formation acquise par les auteurs du projet
- 4.3 Programme de formation de nos collègues: phase 1
  - Les objectifs particuliers de formation et les activités reliées
  - Le contenu
  - Le matériel didactique
  - Le matériel technologique
  - Le cadre
  - Le calendrier
  - Les personnes-ressources
- 4.4 Suites au programme: phase 2

5. Perspectives
- 5.1 L'influence des technologies sur la pédagogie
- 5.2 L'influence des technologies sur les contenus
- 5.3 L'influence des technologies sur l'évaluation
- 5.4 L'intégration des technologies: un défi à relever

6. Bibliographie
- 6.1 Livres
- 6.2 Articles de revue
- 6.3 Renvois bibliographiques

Un virage technologique en mathématiques... encore un?



Chapitre 1

1. UN VIRAGE TECHNOLOGIQUE EN MATHÉMATIQUES... ENCORE UN?

1.1 Mathématiques et technologies: la poule et l'oeuf

L'informatique a une importance reconnue dans notre société contemporaine, ce qui n'est pas toujours le cas pour les mathématiques. Pourtant, ce sont les mathématiques qui ont donné naissance à l'informatique. En effet, le langage binaire utilisé dans les ordinateurs et les règles de logique de ce langage furent respectivement conçus par deux mathématiciens: Gottfried Wilhelm Leibniz et Georges Boole. C'est d'ailleurs un autre mathématicien, John Von Neumann, qui est considéré comme le vrai "père" de l'ordinateur. Encore aujourd'hui, les mathématiques contribuent de façon significative à l'essor de l'informatique car ce sont des théories mathématiques qui permettent l'élaboration de nombreux algorithmes utilisés par les ordinateurs.

En contrepartie, l'utilisation des calculateurs et des ordinateurs a aussi une grande influence sur la nature même des mathématiques. Avec ces outils, de nouveaux champs de connaissances se sont développés. Mais cette influence touche aussi la démarche mathématique. Au moyen des outils technologiques contemporains, les mathématiciens peuvent chercher des régularités comme des scientifiques peuvent analyser les résultats d'expériences comportant des variables contrôlées. Le "mathématicien expérimentateur" peut tester des cas particuliers sur son ordinateur beaucoup plus rapidement qu'en utilisant des algorithmes type "papier-crayon". Souvent même, des régularités mises en évidence par l'action de l'ordinateur n'auraient jamais pu être dégagées par des méthodes traditionnelles; les fractales en sont le meilleur exemple.

Les observations recueillies à l'aide de l'ordinateur doivent tout de même être validées, le standard ultime de vérification demeurant une preuve formelle s'appuyant sur des fondements axiomatiques. Or, même là, l'ordinateur est en train de se trouver une niche. Mentionnons, par exemple, que le "théorème des quatre couleurs" a été "prouvé" au moyen d'un programme d'ordinateur analysant systématiquement et de manière exhaustive les quelques milliers de cas possibles. Cette première a causé une commotion dans les milieux mathématiques suscitant une vive controverse autour de la notion de preuve en mathématiques. Somme toute, par l'informatique, on assiste à la création d'une nouvelle dynamique en mathématiques et Lynn A. Steen décrit fort bien cette symbiose "mathématiques-informatique":

> Bien que le public considère souvent l'ordinateur comme un substitut aux mathématiques, chacun est en réalité un puissant outil pour l'autre. En effet, tels les ordinateurs qui fournissent de nouveaux objets d'étude aux mathématiques, ces dernières rendent les ordinateurs incroyablement puissants. (1)

Et Arthur Jaffe a probablement raison quand il avance que la révolution informatique est, en fait, une révolution mathématique. (2)

1.2 Enseignement des mathématiques et technologies

Situation actuelle

Une vision des mathématiques où la technologie a une influence pénétrante serait discordante avec le caractère statique d'un enseignement plutôt magistral et dogmatique. Bien sûr, le rythme de changement dans le domaine technologique est nettement plus rapide que dans le domaine de l'éducation. Selon Hugh Burkardt et Rosemary Fraser (3), des changements significatifs au plan technologique ne prennent que quelques années alors que des changements majeurs sur le plan scolaire mettent de 5 à 20 ans à se réaliser. Actuellement, selon le rapport *Everybody Counts*:

> Les calculateurs et les ordinateurs n'ont virtuellement aucun impact sur l'enseignement des mathématiques malgré leur énorme potentiel à enrichir, éclairer et étendre l'apprentissage des mathématiques. (4)

Plusieurs raisons peuvent expliquer ce phénomène dont le manque de ressources matérielles et un certain conservatisme des milieux de l'éducation. Mais l'interaction "mathématiques-informatique" va inévitablement laisser sa trace dans l'enseignement de notre discipline. D'ailleurs, selon ce même rapport:

> Les cours de mathématiques où l'on ignore l'impact de la technologie sur la pratique actuelle ou future de la science, de l'ingénierie ou des mathématiques commettent une fraude auprès de leurs étudiants! (5)

Il y a quand même plusieurs signes encourageants à l'horizon. D'abord, aux États-Unis, les principaux organismes voués à la promotion de l'enseignement des mathématiques et de l'éducation (tels le National Council of Teachers of Mathematics, le Mathematical Association of America et le National Research Council) prônent l'intégration des outils technologiques dans l'enseignement des mathématiques. Actuellement, c'est une position très largement répandue dans les milieux de pointe de l'enseignement des mathématiques et un net courant indique qu'on s'oriente beaucoup plus vers l'intégration de logiciels-outils plutôt que de didacticiels. Dans cet esprit, sont privilégiés les calculateurs à affichage graphique et les logiciels de manipulation symbolique. Leur utilisation actuelle se concentre autour de quatre pôles:

- outil de démonstration et d'illustration,
- outil d'exploration, de découverte,
- outil de simulation,
- outil de résolution de problèmes.

Ces outils sont encore peu répandus. Une enquête aux États-Unis (6) dans 107 écoles secondaires du Missouri révélait que moins de 10% des professeurs interrogés avaient déjà utilisé un calculateur graphique. La situation au Québec est, sans doute, comparable. Ajoutons que les logiciels de manipulation symbolique ont eu jusqu'à maintenant une diffusion restreinte, concentrée au niveau universitaire. Pour le milieu collégial québécois, le terrain est vierge et, c'est la situation idéale en réforme de programme!

1.3 La véritable question

Dans bien des écrits, nous retrouvons sous diverses formes l'énoncé suivant: "Il faut initier nos jeunes aux diverses technologies car ils vont vivre dans une société hautement technologique.". C'est devenu un lieu commun et la tentation est grande d'adapter cette phrase aux mathématiques en avançant: "Pour FAIRE des mathématiques, nous utilisons maintenant beaucoup les technologies, donc il faut APPRENDRE les mathématiques au moyen des technologies.".

À notre avis, il faut poser le problème différemment. Il faut se demander: "Avec les nouvelles technologies, le professeur peut-il mieux enseigner; l'étudiant peut-il mieux apprendre?" Mais, que signifie mieux enseigner? Essentiellement, c'est de créer un environnement d'apprentissage stimulant l'étudiant à poser des actions lui permettant d'acquérir et de structurer ses connaissances. Et qu'est-ce que mieux apprendre? Pour l'étudiant, c'est sûrement d'atteindre de façon plus satisfaisante les objectifs fixés au départ.

Dans le contexte de l'enseignement des mathématiques, nous pouvons donc reformuler la question comme suit: "Avec les nouvelles technologies, le professeur peut-il créer un environnement d'apprentissage plus stimulant dans lequel l'étudiant s'impliquera et atteindra de façon plus satisfaisante les buts et objectifs visés en mathématiques?" À cette question, nous répondons oui de façon enthousiaste et la suite du texte exposera les raisons de cette réponse... et de cet enthousiasme!

Aspects positifs de l'intégration des technologies à l'enseignement

L'apprentissage

Pour nous, tenants du constructivisme, apprendre c'est poser des gestes qui suscitent des réactions de l'environnement qui, en retour, forcent le sujet à réaménager l'ensemble de ses connaissances. De par sa nature, un calculateur graphique comporte des touches qui appellent des commandes... qui amènent des résultats... attendus ou pas. Inévitablement, ces interactions incitent l'étudiant à structurer sa compréhension de manière vraiment active. Il est beaucoup plus difficile d'engendrer ce type d'interactions (particulièrement sur le plan grahique) avec les moyens traditionnels "papier-crayon". À ce sujet, le rapport *Everybody Counts* ajoute:

> Les technologies devraient être utilisées, non pas parce qu'elles sont séduisantes, mais parce qu'elles améliorent l'apprentissage des mathématiques en étendant le "pouvoir mathématique" de chaque étudiant. Les calculateurs et les ordinateurs ne sont pas des substituts à un travail énergique ou à une réflexion juste mais des outils performants devant être utilisés à des fins productives. (7)

L'intégration des apprentissages

Au fil de nos années d'enseignement, nous avons noté des carences importantes des étudiants au plan de l'intégration des connaissances. D'ailleurs, il s'agit d'une remarque reprise par les différentes instances universitaires à l'endroit de la formation générale dispensée au collégial. Suite à cette remarque, le département a justement décidé de formuler un but de la discipline mathématique relatif à cette dimension. Selon nous, l'utilisation régulière d'un calculateur graphique dans nos classes peut graduellement changer les attitudes de l'enseignant et de l'étudiant afin de favoriser l'intégration tant souhaitée.

En effet, avec un calculateur graphique, on peut faire des dérivées, des intégrales, manipuler des nombres complexes, des matrices, des vecteurs, des données statistiques, des équations paramétriques, des équations différentielles... alouette! Tous ces concepts sont interreliés et intégrés de façon cohérente. Cet instrument offre une polyvalence qu'il faut exploiter. Physiquement, l'appareil n'a pas de cloison et c'est une image que l'étudiant peut transposer aux divers champs des mathématiques si nous lui proposons des activités où il doit établir des liens entre des éléments de connaissance de ces différents champs. Nous avons maintenant une nouvelle prise pour améliorer progressivement cette situation.

La visualisation

Selon Bandler et Grinder[8], 40% des gens environ seraient d'abord des visuels, 40% des auditifs et 20% des kinesthésiques. Une telle observation nous incite à porter une attention plus grande à ces différences durant l'apprentissage. En bref, l'observation d'un phénomène sous plusieurs aspects devrait en augmenter sa compréhension. L'extrait suivant confirme ce propos.

> Robert et Boschet ont montré de façon consistante que la plupart des étudiants qui ont du succès en mathématiques supérieures sont ceux qui ont une certaine souplesse à travailler avec plus d'une représentation (graphique, numérique ou symbolique). Ceux qui sont limités à une représentation (habituellement numérique ou symbolique) sont moins enclins à résoudre une grande variété de problèmes. [9]

Soulignons qu'une des difficultés majeures que rencontrent nos élèves dans leur apprentissage des mathématiques est le niveau élevé d'abstraction des concepts et des méthodes mathématiques. Ils éprouvent aussi une difficulté à donner du sens aux objets qu'ils rencontrent dans des situations à caractère mathématique. L'habileté à visualiser les aideraient à faire face à ces difficultés. Zimmerman et Cunningham sont plus précis à ce sujet.

> L'intuition que la visualisation mathématique recherche n'est pas une sorte d'intuition vague, un substitut superficiel à la compréhension, mais une intuition qui pénètre au coeur d'une idée. Elle donne profondeur et signification à la compréhension, devient un guide fidèle à la résolution de problèmes et inspire la créativité dans la découverte. Pour atteindre cette forme de compréhension, la visualisation ne peut être isolée des mathématiques. La pensée visuelle et les représentations graphiques doivent être liées à d'autres modes de pensée mathématique et d'autres formes de représentations. On doit apprendre à nos élèves comment les idées peuvent être représentées symboliquement, numériquement et graphiquement et comment passer d'un mode à l'autre. On doit développer chez eux l'habileté à choisir l'approche la plus appropriée à un problème donné et leur faire comprendre les limites de ces trois dialectes du langage mathématique. (10)

En enseignement des mathématiques, ces observations se traduisent par: "relier, aussi souvent que possible, les aspects numérique, symbolique et graphique présents dans une démarche mathématique". C'est là une constante dans nos lectures et c'est aussi un objectif de notre discipline. Cet objectif peut mieux se réaliser avec l'aide des outils contemporains. Rappelons que, dans l'évolution du calculateur, c'est l'aspect numérique qui a d'abord été développé. Mais, on dispose maintenant de calculateurs graphiques qui font de surcroît du calcul symbolique. S'ajoutent donc aux calculateurs, des capacités graphiques et symboliques, permettant de fermer le triangle. Maintenant, développons davantage la dimension visuelle.

Les mathématiques ont toujours utilisé deux approches complémentaires: d'une part, une approche logique et formelle où les éléments sont présentés de façon rigoureuse, systématique et ordonnée et, d'autre part, une approche intuitive, plus vivante, plus globale où les relations logiques ont une signification concrète. Ces deux aspects se sont toujours côtoyés chez ceux qui "faisaient" des mathématiques. Mais force est d'admettre que la plupart des enseignants de mathématiques ont reçu une formation qui a démesurément amplifié l'importance de la première approche allant même, parfois, jusqu'à discréditer la seconde. L'histoire des mathématiques a pourtant maintes fois montré que chacune avait ses forces et ses faiblesses. En mathématiques, c'est par la visualisation que se réalise cette approche intuitive. Walter Zimmerman et Steve Cunningham définissent la visualisation comme suit:

> Nous utilisons le terme visualisation pour décrire les procédés de production ou d'utilisation de représentations géométriques ou graphiques de concepts mathématiques, principes ou problèmes qu'elles soient faites à la main ou générées par un ordinateur. (11)

On assiste aujourd'hui dans les domaines scientifiques et particulièrement en mathématiques à une renaissance de l'intérêt dans la visualisation. L'ordinateur, par ses remarquables capacités graphiques, est le premier responsable de cette renaissance. Non seulement produit-il des images simplement et rapidement mais celles-ci peuvent être dynamiques et interactives. De même, quoique de façon plus réduite, les calculateurs à affichage graphique sont des outils de visualisation tout à fait valables. En effet, le calculateur graphique comporte maintes fonctions permettant de produire et d'analyser rapidement des graphiques sous de multiples aspects. Avec cet outil, la richesse et le nombre d'expériences visuelles que l'étudiant vivra n'a aucune commune mesure avec ce qu'il a pu accomplir jusqu'à présent avec des moyens traditionnels et, comme le souligne Don Small:

> Les futures générations vont identifier les années 90 comme celles où fut appris comment enseigner et comprendre les mathématiques graphiquement. (12)

Ajoutons que la perception actuelle des mathématiques cadre parfaitement avec cette notion de visualisation. En effet, Lynn A. Steen définit les mathématiques comme la science des "patterns". À ce sujet, voici ce que disent Zimmerman et Cunningham:

> En parlant de "patterns", Steen emploie une métaphore, mais la métaphore des "patterns" est certainement une métaphore visuelle. Tous les "patterns" ne peuvent être visualisés, mais il est naturel de vouloir visualiser un "pattern" autant qu'il l'est de vouloir entendre une mélodie. Si la mathématique est la science des "patterns", il est naturel d'essayer de trouver les moyens les plus efficaces de visualiser les "patterns" et d'apprendre à utiliser la visualisation de façon créative comme un outil de compréhension. Voilà l'essence de la visualisation mathématique. (13)

D'ailleurs, il est étonnant que dans un cours de calcul, axé sur l'étude du changement, on se contente de présenter les concepts fondamentaux de limite, dérivée ou intégrale sous une forme statique. Un outil permettant de faire des animations graphiques traduisant la dynamique derrière ces concepts est requis. Un calculateur graphique programmable peut effectuer ces tâches. Relié par interface à un rétroprojecteur, il peut être utilisé efficacement en classe pour faire des démonstrations. Dans cet ordre d'idées, David Tall dans un article portant sur la visualisation en calcul affirmait:

> Nier la visualisation, c'est nier la source de plusieurs des plus profondes idées en mathématiques. Dans les premières étapes du développement de la théorie des fonctions, des limites, de la continuité, la visualisation a été une source fondamentale d'idées. Nier ces idées à nos élèves, c'est les couper des sources historiques du sujet. (14)

Malgré les puissances de la visualisation, il ne faut pas la considérer comme la panacée aux problèmes d'apprentissage de nos élèves. Cependant, nous croyons qu'il faille réserver une place plus grande à cet aspect des mathématiques dans notre enseignement et prioriser les objectifs suivants:

- développer chez l'élève l'habileté à produire un diagramme approprié pour représenter un concept mathématique et utiliser le diagramme pour améliorer sa compréhension du concept;
- développer chez l'élève l'habileté à produire un diagramme approprié dans une situation de problème et utiliser le diagramme pour comprendre le problème et élaborer un plan de résolution (au sens de Polya);
- favoriser la production de diagrammes dans une situation d'exploration afin de faciliter la découverte mathématique;
- développer chez l'élève l'habileté à interpréter des tableaux, des diagrammes, des graphiques.
- Dans l'atteinte de ces objectifs, l'ordinateur et le calculateur graphique constituent des outils sur mesure.

La démarche mathématique de l'étudiant

Comme nous l'avons souligné précédemment, les mathématiques forment la science des régularités ("patterns"). Encore faut-il pouvoir observer ces régularités, les noter, traduire la perception de ces observations sous forme de conjecture, puis essayer de la valider. Un calculateur graphique permet de faire maintes observations aux plans numérique, graphique et symbolique. Ces observations constituent la base pour émettre des conjectures et nourissent la démarche inductive de l'étudiant. Nous sommes alors dans un contexte où l'étudiant peut développer son sens de l'observation, son intuition et son habileté à émettre des conjectures plausibles; ce sont là aussi des objectifs de notre discipline. À partir de là, il est approprié d'apporter une preuve formelle et cela rétablit un meilleur équilibre entre les aspects inductif et déductif des mathématiques.

Il y a aussi des simulations qui peuvent être réalisées beaucoup plus facilement avec un calculateur. Par exemple, dans le domaine des probabilités, une fois le générateur de nombres aléatoires amorcé, on peut simuler (sur le TI-85) 100 lancers d'une pièce de monnaie et connaître le nombre de piles obtenus par:

sum seq (rand > 0.5, K, 1, 100,1).

Ce symbolisme représente la somme ("sum") d'une suite ("seq") formée de 100 nombres aléatoires entre 0 et 1 comparés "logiquement" à 1/2 ("rand > 0.5" donne 1 si c'est vrai et, 0 dans le cas contraire) où K varie entre 1 et 100 par incrément de 1 ("K,1,100,1") et il ne faut pas croire que c'est une opération "push button". Dans cet ensemble d'opérations, on traite de suite, de nombre aléatoire, de test logique, de variable indépendante (K). C'est l'usager qui doit agencer tous ces éléments de manière cohérente. En fait, c'est carrément une "macro-commande" que l'élève peut bâtir sans programmation aucune.

Quand la technologie sert d'outil de résolution de problèmes, ce sont les stratégies générales de résolution qui deviennent le centre d'attraction. N'oublions pas que, malgré le mot d'ordre du NCTM qui en a fait son cheval de bataille pour les années 80, la résolution de problèmes a trouvé niche dans moins de 1% des classes[15]. Avec l'aide de la technologie, l'étudiant peut maintenant se concentrer davantage sur les phases de compréhension du problème et de conception d'un plan de résolution. Puisque les calculateurs et les logiciels de manipulation symbolique peuvent exécuter les principales opérations mathématiques (calcul d'un déterminant, inversion d'une matrice, résolution d'une équation, calcul d'une intégrale définie, calcul d'une limite, calcul d'un écart-type, tracé d'un histogramme etc.), il résulte qu'en situation de problème, c'est l'usager, lors de la phase de conception d'un plan, qui met l'accent sur le choix et l'organisation des éléments de la solution. Cela demande du discernement, de l'analyse, de la synthèse, des habiletés de haut niveau visés par notre discipline. La mise en application du plan peut alors devenir une formalité puisque l'outil technologique prend en charge les tâches de calcul numérique, algébrique et de représentation graphique.

La technologie permet également d'améliorer la dernière phase du processus de résolution: l'examen de la solution et ce qui traite particulièrement de la vérification du résultat. Actuellement, à cette étape, l'étudiant se limite presqu'exclusivement à deux moyens de vérification (quand il a acquis le réflexe de vérifier): il demande au professeur si sa réponse est bonne ou encore il va voir à la fin du volume quelle est la réponse proposée. Ce n'est pas très valable pour le développement de l'autonomie et du sens critique. Par contre, les outils technologiques peuvent aussi proposer des moyens de vérification. Ce n'est pas toujours direct, ni possible; parfois cela demande de l'imagination, mais c'est tout de même une amélioration par rapport à la situation actuelle.

Nous constatons aussi que les habiletés de communication écrite ne sont pas mises de côté pour autant, au contraire. D'abord, l'interface avec un calculateur exige une rigueur d'écriture et de syntaxe dépassant souvent les exigences habituelles d'écriture. Nous prévoyons aussi que l'écriture d'un problème aura désormais une forme "hybride", à savoir que l'étudiant devra mentionner les résultats obtenus par le calculateur, expliquer en quoi ces résultats s'insèrent dans sa démarche et, de plus, détailler ses raisonnements type "papier-crayon". Plus que jamais, cela forcera l'étudiant à attaquer ses problèmes de manière beaucoup plus globale et à écrire clairement sa démarche s'il veut être compris. L'étudiant percevra mieux ce qui est utile en mathématiques car son action ne sera pas centrée sur les détails. On laisse les calculateurs s'occuper des tâches de bas niveau et les stratégies de résolution de problèmes prennent alors l'importance qui leur revient.

L'apprentissage coopératif

Nous avons pu constater, dans les laboratoires de statistiques, que les étudiants aiment travailler en équipe lorsqu'ils utilisent des outils technologiques. Au départ, nous croyons que cela les rassure face à cette nouvelle tâche; le sentiment d'insécurité initial est ainsi moins lourd à porter à deux! On peut ausi y interpréter un phénomène de compensation: l'équipier va rétablir l'apect humain partiellement perdu lorsque le professeur fait place à la machine. Dans cet esprit, nous estimons que l'intégration du calculateur graphique devrait être accompagnée d'une accentuation du travail coopératif. Aylwin développe fort bien cette idée.

> L'un des premiers avantages de l'apprentissage coopératif est de placer l'élève dans un climat de sécurité affective. Nous avons tous constaté que beaucoup de nos élèves ont une image d'eux-mêmes relativement négative et que certains d'entre eux éprouvent ce qu'on appelle "le sentiment acquis d'impuissance". Il va de soi que l'anxiété ne peut que croître chez ces élèves si on les place dans un cadre de compétition où la force des uns se mesure à la faiblesse des autres et où la victoire de l'un s'érige sur la défaite des autres. Or, de nombreuses recherches, celles de Paul MacLean en particulier, ont montré que l'activité du cerveau, dans la partie corticale, est inhibée lorsque le système limbique, siège des émotions, devient le plus actif, c'est-à-dire lorsque les émotions prennent le pas sur la raison. En d'autres termes, la motivation et la performance intellectuelle de nos élèves sont conditionnées par la sécurité affective que leur procure l'environnement pédagogique, et c'est ce que l'on peut obtenir dans l'apprentissage coopératif. (16)

Ainsi, nous prévoyons que l'introduction d'un calculateur graphique, commun à tous les étudiants, créera un climat d'entraide et de coopération propice à développer, chez ces derniers, le "savoir interagir socialement", un des buts avoués du Collège en termes de formation fondamentale. De plus, il faut souligner que le travail coopératif a aussi une incidence sur la qualité des apprentissages. En effet, selon Piaget et plusieurs cognitivistes, les interactions sociales constituent un élément essentiel à l'apprentissage. À ce sujet, Aylwin ajoute:

> D'abord, l'apprentissage est un phénomène d'ordre essentiellement social, où l'interaction avec autrui est nécessaire, pour obtenir l'information, pour la transformer, pour la valider, pour l'utiliser et la transmettre; il faut donc insister sur le fait que l'écoute individuelle, silencieuse et passive n'est pas naturelle; c'est le dialogue, la confrontation des points de vue et le partage qui sont naturels, et qui aident les élèves à renouveler constamment leur motivation.(17)

Dans notre esprit, il est clair qu'autour du calculateur graphique, il est possible de créer un environnement pédagogique pouvant susciter le besoin d'échanges intellectuels, de confrontation de points de vue et de partage de modes de pensée profitables à tous. Nous avons tous remarqué, un jour ou l'autre, un étudiant (peu souvent présent au cours) venir se plaindre de sa faible note au dernier examen en criant haut et fort qu'il avait pourtant tout compris! Dans bien des cas, sa compréhension est demeurée superficielle: elle n'a pas été questionnée de l'extérieur, elle est assise sur un nombre restreint de points de vue... en somme, elle n'est pas "blindée". À long terme, nous croyons que l'apprentissage coopératif au moyen du calculateur augmentera la motivation de l'étudiant car ce dernier viendra chercher aux périodes de cours des éléments essentiels à sa formation qu'il ne peut développer ailleurs. Relativement aux mathématiques, l'extrait suivant de *The laboratory approach to teaching calculus* du MAA appuie ces propos.

> La plupart des mathématiciens travaillent en équipe et non isolément. Travailler en synergie dans un groupe est instructif, apporte de la satisfaction et est personnellement enrichissant. Il est excitant et gratifiant de voir des étudiants assumer la responsabilité de la compréhension d'un partenaire aussi bien que de leur propre compréhension. Nous devons encourager les activités de groupe et défier le mythe que les mathématiques s'apprennent mieux solitairement. Faire l'expérience d'incorporer dans notre propre pensée le mode de pensée d'autres personnes est un ingrédient important à l'apprentissage. (18)

Dans un environnement à caractère technologique, l'étudiant devient beaucoup plus actif. Il n'est pas toujours en attente du professeur. Une fois amorcée une activité sur calculateur, l'étudiant peut décider des gestes qu'il va poser, de la démarche qu'il va entreprendre en fonction de la rétroaction qu'il reçoit. Certains avancent même que les deux grands agents de changement dans l'enseignement des mathématiques pour la prochaine décennie seront la technologie et l'autonomie (19). De plus, selon le MAA:

> Les étudiants seront énormément stimulés par l'introduction des systèmes de calcul symbolique dans le curriculum car ils permettront de transformer l'expérience collégiale trop souvent passive en une de participation active. (20)

À ce sujet, L.A. Steen ajoute:

> Les étudiants, dans leur découverte des mathématiques, acquièrent une certaine profondeur dans la reconnaissance de "patterns" et bâtissent lentement une confiance dans leurs propres habiletés à comprendre les mathématiques. Auparavant, seuls les étudiants suffisamment doués pouvaient vivre l'expérience de la découverte. Maintenant, avec l'aide des ordinateurs, la plupart des étudiants peuvent expérimenter la joie de la découverte.(21)

Les multiples expériences sur le calculateur que l'étudiant tentera en groupe lui permettront de confirmer ou d'infirmer des hypothèses, de vérifier des raisonnements, d'aborder une même situation selon plusieurs approches, de développer son sens critique, et, somme toute, d'atteindre une meilleure compréhension des concepts. Aylwin abonde en ce sens:

> Face à cette situation, l'apprentissage coopératif constitue l'une des meilleures démarches pour favoriser un apprentisage en profondeur. Dans ce cadre, en effet, les travaux exigés de l'étudiant amènent celui-ci à pratiquer toute la gamme des capacités intellectuelles: l'analyse, la synthèse, la critique, la créativité, la résolution de problème, la prise de décision et la métacognition. Comme l'ont montré deux des principaux cognitivistes, Ausubel et Bruner, la profondeur de la compréhension d'un concept est proportionnelle à la variété des opérations intellectuelles qu'on fait sur ce concept, et c'est ce que procurent, normalement, les travaux et les échanges faits dans l'apprentissage coopératif. (22)

Selon nous, dans le travail coopératif utilisant la technologie, il y a là, à long terme, un potentiel de gain d'autonomie de l'étudiant à la fois dans le processus d'apprentissage des mathématiques et dans l'utilisation de ces dernières. Cette affirmation peut paraître contradictoire. Faut-il comprendre qu'il faille passer par la coopération pour atteindre l'autonomie? Ici, il faut comprendre que, dans le travail coopératif, chacun des équipiers demande des explications, fait le point, met en cause certains raisonnements, s'interroge quant à la direction à prendre... Ils jouent, en somme, le rôle de moniteurs et toutes ces actions aident chacun à développer son propre "moniteur interne" (23). Ainsi, les réflexes ou habitudes d'organisation du travail acquises en équipe pourront être utilisés lorsque chacun des participants se retrouvera, seul, face à un problème. Par contre, cela requiert un plus grand sens des responsabilités de la part de l'étudiant. Tous ces éléments, faut-il le rappeler, font partie de nos préoccupations dans le nouveau programme de Sciences de la nature.

Choix des outils technologiques

Chapitre 2

2. CHOIX DES OUTILS TECHNOLOGIQUES

2.1 Critères de choix

Besoins sur le plan mathématique

L'aspect numérique
Définition et manipulation de variables
Définition et manipulation de suites
Opérations sur les nombres complexes
(formes cartésienne, polaire ou exponentielle)
Équations paramétriques
Équations polaires
Équations différentielles (simples)
Opérations matricielles et vectorielles
Racines d'un polynôme
Résolution d'un système d'équations
Résolution d'une équation à une inconnue et plusieurs variables ("solver")
Calculs en combinatoire et générateur de nombres aléatoires
Calculs statistiques simples et représentations diverses
Tables statistiques
Calcul d'intégrales définies
Calcul de valeurs et de vecteurs propres

L'aspect graphique
Capacité de faire des tracés de:

- fonctions à une variable
- de courbes paramétriques
- de courbes en coordonnées polaires
- de solutions d'équations différentielles simples
- graphiques en trois dimensions.

Commandes permettant:

- l'affichage simultané ou séquentiel de plusieurs graphiques, de suivre le tracé d'un graphique avec un curseur affichant les coordonnées,
- de faire des agrandissements ou des réductions de graphiques indépendamment sur les deux axes,
- d'ajouter des éléments de dessin (droites, tangentes, cercles, zones ombrées...) à un graphique.

L'aspect symbolique
Limites symboliques
Dérivées et intégrales symboliques
Sommations symboliques
Manipulations algébriques, simplifications...

Ces trois différents aspects doivent pouvoir être interreliés.

La programmation
Nous désirons avoir accès à un langage de programmation simple, facile à apprendre et permettant l'insertion de commandes graphiques ou numériques.

Facilité d'apprentissage

Le département devra prendre en charge la formation technologique à même les cours qu'il dispensera. Dans ce contexte, il nous apparaît important de choisir des outils dont l'apprentissage ne nécessite pas un investissement de temps démesuré et pouvant se répartir à l'intérieur de nos quatre cours (101, 103, 203 et 105).

Accessibilité

Ici, nous attaquons un point majeur. Les expériences vécues en laboratoires de statistiques par les professeurs du département ont révélé que, trop souvent, les ennuis techniques de réseau, de lenteur, de pannes... venaient perturber les séances de laboratoires. De plus, la forte demande oblige à réserver très longtemps d'avance ces locaux... en souhaitant que le moment choisi soit le bon! Par ailleurs, l'utilisation de l'acétate électronique est un peu décevante. D'abord, la qualité d'image laisse à désirer et il faut des locaux sans puits de lumière où les fenêtres sont équipées de rideaux très opaques. Aussi, à partir du quatrième étage, il faut se déplacer avec le chariot (portant ordinateur et acétate) à travers couloirs et ascenseur... avec dix minutes entre deux cours, ce n'est pas évident! En somme, dans notre choix d'outils technologiques, nous souhaitons minimiser ce genre d'ennuis.

Mais, il y a plus. Un outil technologique doit être souple, accessible en tout temps lors d'une démarche mathématique, un peu comme la règle et le compas dans les cours de géométrie, jadis ou même le calculateur numérique aujourd'hui. Cela doit devenir un outil de travail courant pour l'étudiant et le professeur à la fois dans les locaux de classe et à la maison. Nous en faisons une priorité absolue. Cette position va évidemment à l'encontre d'une utilisation exclusive des laboratoires d'informatique. De toute manière, il faut se rendre à l'évidence: les étudiants en Sciences de la nature ne pourraient utiliser de façon régulière et massive les laboratoires d'informatique. La demande dépasserait les capacités locales.

Documentation et matériel de soutien

Un autre critère important dans le choix de nos outils technologiques est la qualité de la littérature rattachée à ces outils. Nous le savons tous, il ne suffit pas d'avoir le guide d'utilisation d'un logiciel pour savoir instantanément quelles activités proposer à l'étudiant en rapport avec ce logiciel. Il faut d'autres sources d'information traitant des expériences réalisées ou en cours. Les revues dédiées à l'enseignement des mathématiques ont maintenant une saveur nettement plus technologique et s'avèrent des sources précieuses.

De plus, les livres sur ces sujets et les bulletins périodiques d'information d'origines diverses sont fort utiles. Il ne faut pas que le professeur ait, isolément, tout à construire. Il peut fort bien utiliser, adapter du matériel existant ou encore s'en inspirer pour produire du matériel original.

Dans le cas du calculateur graphique, ce dernier doit pouvoir se brancher à un rétroprojecteur afin de permettre les démonstrations dans les locaux de classe. En outre, le calculateur doit pouvoir être mis en liaison avec un micro-ordinateur pour:

- sauvegarder dans la mémoire de l'ordinateur les données et les affichages du calculateur afin de faciliter leur intégration à des documents didactiques produits à l'aide de l'ordinateur,
- faciliter la production de programmes pour le calculateur,
- imprimer des données ou des affichages apparaissant à l'écran du calculateur.

Coût

À la section "Accessibilité", nous faisions ressortir l'idée que les laboratoires d'informatique existants n'offrent pas la disponibilité nécessaire et la facilité d'utilisation voulue. Nous n'avons pas l'intention de demander l'addition de laboratoires d'informatique supplémentaires. Sur le plan financier, cela nous apparaît irréaliste et, de toute facon, ne répondrait pas à la souplesse désirée. Il faut donc se tourner vers un outil technologique polyvalent dont l'étudiant pourrait assumer les frais. Bien sûr, nous pensons au calculateur graphique (en fait, une sorte de mini-ordinateur de poche) dont les performances (et non le prix!) sont élevées.

Pour les étudiants du programme Sciences de la nature, ce serait un outil obligatoire dans tous les cours de mathématiques, outil qui pourrait même, éventuellement, être utilisé dans tous les cours de sciences. Pour être abordable, nous estimons qu'un tel calculateur devrait coûter autour de 100$ pièce. Nous croyons que cette demande est réaliste car pour la durée du programme, c'est environ le prix d'un manuel par session. À moindre coût, le Collège pourrait également offrir des calculateurs en location (par exemple, à 15$ par session) avec option de "location-achat", le montant déjà déboursé en location pouvant servir, à tout moment, à réduire le prix d'achat d'autant. Au bout de quatre ans, ces calculateurs ne coûteraient rien au Collège et auraient servi à aider les étudiants ayant un budget limité. C'est une expérience qui a déjà été tentée avec succès aux États-Unis. (24)

2.2 Choix retenus

Micro-ordinateur ou super-calculateur à affichage graphique?

La disponibilité de l'outil choisi étant la priorité absolue, le calculateur graphique devient l'outil à privilégier. Nous n'avons pas trouvé le calculateur pouvant répondre simultanément aux critères liés au coût, à la qualité de la documentation, à la capacité de manipulation symbolique et de représentations graphiques en trois dimensions. Il nous reste donc à choisir un calculateur graphique répondant le mieux à ces critères quitte à compléter, en laboratoire, avec un logiciel approprié à remplir les tâches laissées pour compte.

Le super-calculateur choisi

Dans l'abondante littérature consultée, deux fabricants ressortent nettement du lot: Texas Instruments et Hewlett-Packard. Pour nos besoins, nous avons considéré le TI-85 (l'appareil haut de gamme de Texas Instruments) et le HP-48-G (de Hewlett-Packard).

Le calculateur graphique TI-85 de Texas Instruments répond à la plupart de nos besoins aux plans numérique et graphique (sauf les graphiques en trois dimensions). La programmation est simple et le coût est dans la gamme prévue. Le calculateur est limité sur le plan des manipulations symboliques; par ailleurs, la documentation sur les calculateurs de la famille Texas est assez abondante, ce qui nous fournit un bon indice de la diffusion de ces appareils. De plus, la compagnie Texas Instruments offre gratuitement un bulletin d'information périodique sur l'utilisation pédagogique de ses calculateurs. Elle offre aussi des copies de programmes écrits pour ses calculateurs et des références bibliographiques comprenant livres, ateliers, vidéos et bulletins d'information indépendants. Quant au calculateur HP-48G, il répond à la majorité de nos besoins aux plans numérique et graphique (il peut exécuter des graphiques en trois dimensions) et peut faire de la manipulation symbolique (dérivée, intégrale...). Par contre, la difficulté d'apprentissage du langage de programmation, son coût élevé et la rareté de la documentation sont des désavantages qui ne peuvent être ignorés, ni suppléés.

En conclusion, nous suggérons le calculateur graphiqueTI-85 comme principal outil technologique à être utilisé dans les cours de mathématiques du programme Sciences.

Le logiciel de manipulation symbolique à choisir

Le choix d'un calculateur règle donc une partie de nos besoins. Avec quel outil, allons-nous faire des graphiques en trois dimensions et des manipulations symboliques élaborées? Pour nous, il est important de choisir un logiciel dont l'interface peut ressembler à l'environnement Texas et qui peut être assez rapide en réseau. Un logiciel tournant à la fois sur Macintosh et sur IBM peut réduire les problèmes d'accessibilité aux ordinateurs et favoriser les échanges entre professeurs-utilisateurs de différents collèges. Malheureusement, le dégrèvement initialement demandé pour le projet actuel a été amputé et il devient tout à fait impossible de le réaliser dans son ensemble. Les travaux préliminaires nous orientent vers *MAPLE* ou *MATHEMATICA* et il faudra analyser ces outils en profondeur avant de faire un choix définitif.

2.3 L'approche-programme

Quelques outils technologiques communs en Sciences de la nature?

Dans le programme de Sciences de la nature, les discussions entre les départements quant à leurs besoins technologiques pour l'enseignement ont révélé que ceux-ci étaient fort variables et que chaque département devrait voir à combler ses propres besoins. Pour nous, en mathématiques, le calculateur graphique TI-85 et un logiciel de manipulation symbolique permettraient d'opérer un virage technologique et de moderniser nos approches. Ces outils sont polyvalents et peuvent répondre aux multiples besoins des différents cours de mathématiques. De plus, grâce à cette polyvalence, leur utilisation peut s'étendre à tous les cours de sciences. En effet, dans tous les cours de sciences sont couramment utilisés des mathématiques: on fait appel à des graphiques, à des calculs, à des manipulations algébriques, à des analyses statistiques, etc. Nous pensons que ces outils pourraient être avantageusement utilisés dans les autres disciplines du programme où se présentent des tâches de nature mathématique. C'est une possibilité qu'il faudrait analyser de manière concertée.

Des éléments intégrateurs pour les étudiants et les professeurs

En supposant l'utilisation massive dans le programme Sciences de la nature du calculateur graphique TI-85, nous entrevoyons des retombées intéressantes pour les étudiants et les professeurs. Comme nous l'avons déjà signalé, un tel outil peut ouvrir des perspectives nouvelles à l'intérieur de la discipline mathématiques, mais les mêmes arguments nous portent à croire qu'il peut aussi multiplier les ponts avec les autres disciplines scientifiques du programme. Nous croyons que cet outil peut favoriser l'utilisation d'un vocabulaire commun et permettre à l'étudiant l'intégration des apprentissages à l'intérieur du programme. En outre, pour les professeurs, ce serait une plate-forme privilégiée d'échanges. Les discussions relatives à l'utilisation du calculateur dans les différents cours déboucheraient inévitablement sur des échanges quant aux contenus, aux approches pédagogiques, aux modes d'évaluation, etc. En somme, c'est ce que l'on appelle un élément intégrateur dans un contexte d'approche-programme et, avouons-le, à l'heure actuelle, ces éléments intégrateurs ne sont pas légion.

Exemples d'activités utilisant le calculateur graphique

Chapitre 3

3. EXEMPLES D'ACTIVITÉS UTILISANT LE CALCULATEUR GRAPHIQUE

3.1 Remarques préliminaires

Le présent chapitre présente une douzaine d'activités inédites que nous avons conçues et réalisées à l'aide du calculateur graphique TI-85. Il nous apparaît important d'illustrer concrètement le potentiel pédagogique de ce calculateur car il y a maintes remarques contenues dans ce rapport qui, à la lumière de ces activités, prennent toute leur signification. De plus, ces activités pourront servir à la fois au programme de formation du semestre Hiver 95 et à l'implantation du calculateur au semestre Automne 95.

Ces activités touchent maints sujets et pourront être utilisées à l'intérieur des cours Math 101, Math 103, Math 105, Math 203, Math 303 et Math 307. Elles prennent diverses formes: présentation, simulation, exploration ou résolution de problèmes. Relativement aux activités de résolution de problèmes et d'exploration, nous avons essayé de respecter les principes suivants:

- tenir compte des connaissances de l'étudiant sur les plans mathématique et technologique,
- permettre à l'étudiant d'organiser ses actions afin qu'il recoive une rétroaction,
- permettre, autant que possible, à l'étudiant de travailler sur les plans numérique, symbolique et graphique (même si c'est "papier-crayon"),
- faire peu fréquemment appel à la programmation,
- permettre à l'étudiant d'observer, de conjecturer, de tester puis de prouver (s'il y a lieu).

Parfois, les activités révèlent des aspects inconnus et soulèvent de nouvelles interrogations. C'est pourquoi certaines activités sont suivies d'exercices qui viennent parfaire la compréhension des concepts en cause. Ces activités devraient être réalisées en équipe quoique l'organisation du travail d'équipe mériterait plus de réflexion. Il n'est pas nécessaire que tous fassent les mêmes tâches en même temps. À notre avis, il faudrait quelques ajustements mineurs à nos activités pour exploiter davantage le travail coopératif qu'on peut y faire. Plus que tout, c'est l'expérimentation qui nous guidera dans ces rectificatifs.

Notez que les écrans d'affichage du TI-85 n'ont pu être reproduits intégralement car le logiciel approprié à cette tâche, le TI-LINK, n'était pas encore disponible. Nous nous sommes rabattus sur les logiciels Anugraph et TEMATH pour obtenir des représentations, somme toute, assez fidèles de ces écrans. Aussi, nous avons utilisé le point dans les représentations décimales afin de respecter la syntaxe du calculateur. Ajoutons que les instructions, fonctions et menus du calculateur apparaissent toujours en RELIEF et sont regroupés dans un petit glossaire à la section 3.14. Idéalement, il faudrait que le lecteur suive les activités proposées avec un calculateur TI-85 à la main. Par ailleurs, afin de ne pas restreindre la diffusion de ce document, nous avons suffisamment détaillé le scénario pour qu'une simple lecture permette de saisir la démarche globale utilisée.

3.2 En ligne droite dans la courbe

Préambule

L'activité que nous décrivons plus bas peut prendre place au début du cours Math 103 comme exploration du concept de dérivée. Sur le plan des préalables, l'étudiant doit être familier avec les concepts de fonction et de pente de droite. Suite à l'activité, le professeur peut formaliser la définition de la dérivée en un point, le concept de tangente à une courbe, le concept de fonction dérivée ainsi que celui de différentiabilité.

Activité

a) Vous allez travailler avec la fonction x^2. Le graphique de cette fonction passe par le point (1, 1). Vous allez effectuer plusieurs agrandissements (zooms) consécutifs sur le graphique de cette fonction en centrant l'opération sur le point (1, 1). Ensuite, vous calculerez une pente en utilisant le point (1, 1) et un autre point (x, y) qui sera sur la courbe mais très rapproché du point (1, 1). C'est le calculateur qui fera le calcul. À cet effet, entrez l'équation suivante au clavier.

$$P = \frac{y - 1}{x - 1}$$

Il faut entrer: P = (y - 1) / (x - 1).
Notez que x et y sont en minuscules. Après avoir enfoncé la touche **ENTER**, vous recevrez le message "**DONE**". Ainsi, le contenu de P s'ajustera automatiquement aux valeurs de x et de y. En mode **GRAPH**, définissez la fonction

$$y1 = x^2$$

et choisissez **ZDECM** comme fenêtre de traçage. En mode **TRACE**, amenez le curseur au point (1, 1) puis appuyez sur **ENTER** pour spécifier au calculateur que ce point occupera le centre de l'écran. Ensuite, procédez à 5 agrandissements **ZIN** successifs centrés sur (1, 1). Il faut appuyer sur **ZIN** pour le premier et simplement sur **ENTER** pour les suivants. En mode **TRACE**, déplacez le curseur à l'aide de **>** jusqu'au point le plus à droite de l'écran; les coordonnées affichées (x et y) sont celles d'un point de la courbe très très rapproché de (1, 1). Demandez la pente P de la droite joignant ces deux points en enfonçant **ALPHA** puis **P**. L'affichage devient celui de l'écran **HOME**; P est affiché et en appuyant sur **ENTER**, on en obtient la valeur.

Première valeur de P = ...

Revenez au mode **GRAPH**, puis au mode **TRACE** et déplacez-vous le long de la courbe à l'aide de **<** jusqu'au point le plus à gauche de l'écran. Redemandez la nouvelle valeur de P.

Deuxième valeur de P = ...

Les valeurs de P sont des valeurs approchées de la pente de la courbe associée à x^2 au point (1, 1).

Si vous voulez une meilleure approximation, faites quelques agrandissements **ZIN** supplémentaires et allez chercher deux autres valeurs de P. L'une avec des déplacements à droite de (1, 1) et l'autre avec des déplacements à sa gauche.

Troisième valeur de P = ...

Quatrième valeur de P = ...

Sur la base des résultats observés, faites une conjecture quant à la valeur de la pente de la courbe x^2 au point (1, 1).

La pente de la courbe x^2 au point (1, 1) est .....

b) Reprenez la procédure de la partie **a)** avec la même fonction, x^2, mais cette fois en remplaçant le point (1, 1) par le point (2, 4). Attention, il faut modifier (pourquoi?) la définition de P comme suit:

$$P = \frac{y - 4}{x - 2}$$

Émettez une conjecture.

La pente de la courbe x^2 au point (2, 4) est .....

c) Reprenez la procédure de la partie **a)** avec la même fonction, x^2, en remplaçant le point (1, 1) par le point (-1, 1) et conjecturez:

La pente de la courbe x^2 au point (-1, 1) est .....

À la lumière des résultats précédents, vous devriez être en mesure de conjecturer de manière générale.

La pente de la courbe x^2 au point (a, a^2) est .....

d) Reprenez la procédure de la partie **a)** en considérant la fonction $|x|$ et en vous approchant par la gauche et par la droite du point (0, 0). Que concluez-vous?

Exercice

1.

Pour chacun des cas suivants, étudiez la pente de la fonction au point spécifié. Tirez une conclusion claire.

a) Fonction: $x^{2/3}$ au point (0, 0). [Entrez y1 = (x^2)^(1/3)]

b) Fonction: $(x^2 + 0.001)^{1/2}$ au point d'abscisse 0. [Entrez y1 = √(x^2 + 0.001)]

3.3 Règle de l'Hospital: il faut remonter la pente

Préambule

Dans cette activité, nous visons l'exploration par l'étudiant de la règle de l'Hospital, résultat habituellement vu dans le cours Math 203 mais qui pourrait très bien être abordé dans le cours Math 103. Pour réaliser cette activité, l'étudiant doit connaître le concept de dérivée, son interprétation graphique et son calcul dans des cas simples. À la suite de cette activité, le professeur précisera l'énoncé de la règle de l'Hospital ainsi que ses conditions d'application et proposera quelques exercices supplémentaires.

Activité

Tracez les fonctions suivantes en utilisant l'écran d'affichage standard ZSTD:

$$y1 = 2x + 5$$
$$y2 = -0{,}8x + 1$$

Au moyen de la commande TRACE, trouvez approximativement le point d'intersection de ces deux droites. Maintenant, effectuez la division de $2x + 5$ par $-0{,}8x + 1$. Quelle expression algébrique obtenez-vous? À l'aide de cette expression, essayez de prédire le tracé de la fonction $(2x + 5) / (-0{,}8x + 1)$ et confrontez votre prédiction avec le tracé de y3 = y1 / y2 effectué par le calculateur.

Une fois cette vérification faite, désélectionnez y3, puis choisissez ZDECM dans ZOOM pour pouvoir travailler avec des décimales. Au début, vous avez observé que le point d'intersection des droites y1 et y2 a une ordonnée différente de 0. À l'aide d'essais sur votre calculateur, changez uniquement l'ordonnée à l'origine de y2 (ici, c'est 1) de telle sorte que le point d'intersection entre y1 et "y2 modifié" se situe sur l'axe des x. Une fois ce paramètre trouvé, écrivez l'expression algébrique de cette nouvelle fonction y2. Maintenant, sélectionnez y3 et observez son tracé. Que remarquez-vous?

Vous allez justifier algébriquement cette observation. Plus précisément, si:

$$y1(x) = m_1x + b_1,\ y2(x) = m_2x + b_2 \text{ et que } y1(a) = y2(a) = 0$$

où m_1, m_2, b_1 et b_2 sont des réels quelconques avec $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$; alors exprimez algébriquement $y1(x) / y2(x)$ en fonction de m_1 et m_2.

Pour la suite, effacez y1, y2 et y3 puis tracez deux paraboles ayant une et une seule racine commune. Pour ce faire, définissez y1 et y2 chacun au moyen d'un produit de deux facteurs linéaires. (Ici, dans chacun des cas, on vous a imposé un de ces facteurs.)

y1(x) = (3x – 7) (.....) (à remplir)
y2(x) = (2x + 7) (.....) (à remplir)

À l'aide du calculateur, vérifiez graphiquement à l'écran d'affichage **ZSTD** si vos définitions de y1 et y2 produisent l'effet désiré. Ensuite, tracez la fonction y3 = y1/y2. Utilisez **TRACE** pour estimer la valeur de y3 lorsque x est près de la racine commune. Faites quelques **ZOOM BOX** successifs centrés au point d'intersection des deux paraboles. Que remarquez-vous? Pouvez-vous faire un lien avec le début de l'activité? Quelle conjecture pouvez-vous émettre? Vérifiez cette conjecture dans le cas présent pour y1 et y2 et ensuite pour d'autres exemples de votre cru où vous utiliserez des polynômes simples dans la définition de y1 et y2.

Reprenez la procédure précédente avec

$$y1 = x - \pi$$
$$y2 = \sin x$$
$$y3 = y1 / y2$$

et étudiez le comportement de y3 pour des valeurs de x au voisinage de π.

Exercices

1.

Supposons que:

$$y1(x) = m_1x + b_1$$
$$y2(x) = m_2x + b_2$$

où, m_1, m_2, b_1 et b_2 sont des réels quelconques avec $m_1 \neq 0$ et $m_2 \neq 0$. De plus, admettons que les droites y1 et y2 se coupent en un point d'abscisse a, c'est-à-dire que y1(a) = y2(a).

a) Comme les droites se coupent, qu'est-ce que cela signifie pour m_1 et m_2 ?

b) Trouvez une expression algébrique de a en fonction de m_1, m_2, b_1 et b_2.

c) Cette expression est-elle concordante avec la mesure effectuée au moyen de **TRACE** pour les fonctions y1 = 2x + 5 et y2 = –0,8x + 1 (au début de l'activité précédente)?

d) Si, de plus, y1(a) = y2(a) = 0, trouvez un lien algébrique entre a, m_2 et b_2. Ce lien est-il concordant avec la modification apportée à y2 (au début de l'activité précédente)?

e) Refaites le tracé des fonctions

$$y1(x) = 2x + 5$$
$$y2(x) = -0,8x + 1$$

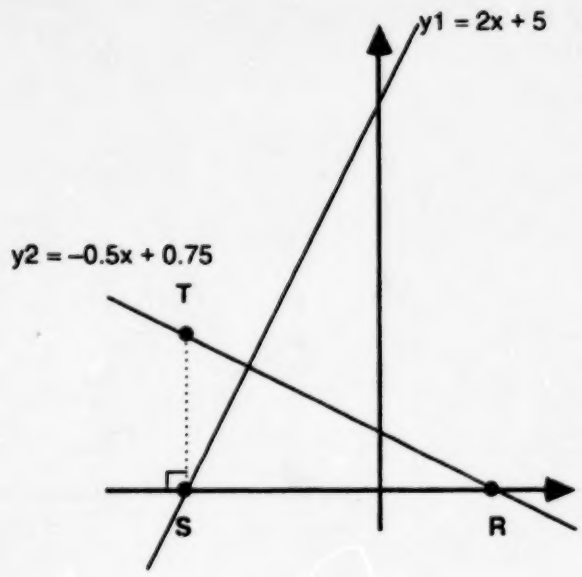
À l'aide de votre calculateur, modifiez uniquement la pente de y2 (ici, c'est –0,8) de telle sorte que le point d'intersection entre y1 et "y2 modifié" se situe sur l'axe des x. Cette valeur est-elle concordante avec l'expression théorique dégagée en **b)**?

2.

Avec votre calculateur, tracez les fonctions

$$y1(x) = 2x + 5$$
$$y2(x) = -0,5x + 0,75$$

L'écran d'affichage **ZSTD** montrera un graphique semblable au suivant.



Dans un premier temps, il s'agit de superposer le point R au point S en transportant la droite y2 au moyen d'un déplacement horizontal. À cette fin, trouvez la fonction

y3 = ...

qui répondrait à cette exigence. Une fois cette fonction trouvée, désélectionnez y3.

Dans un deuxième temps, il s'agit de superposer le point T au point S en transportant la droite y2 au moyen d'un déplacement vertical. À cette fin, trouvez la fonction

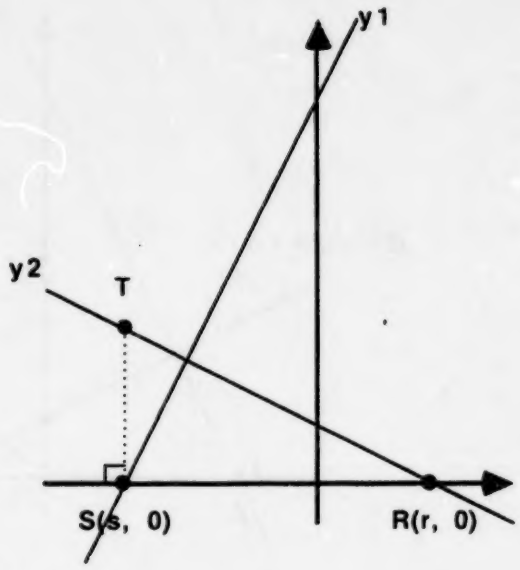
y4 = ...

qui répondrait à cette exigence. Une fois cette fonction trouvée, resélectionnez y3, puis comparez y3 avec y4. Que remarquez-vous? Formalisons ce résultat.

Supposons que nous ayons deux droites définies comme suit:

$$y1(x) = m_1x + b_1$$
$$y2(x) = m_2x + b_2$$

et que les points R et S soient respectivement (r, 0) et (s, 0). La représentation graphique est alors la suivante.



Pour superposer R à S, il suffit:

de déplacer y2 de ..... unités horizontalement vers la gauche.

À ce moment, que devient l'expression algébrique de la droite y2 en fonction des paramètres r, s, m_2 et b_2?

Pour superposer T à S, il suffit:

de déplacer y2 de ..... unités verticalement vers le bas.

Dès lors, que devient l'expression algébrique de la droite y2 en fonction des paramètres r,s, m_2 et b_2?

Maintenant, il vous reste à comparer les deux expressions algébriques obtenues et montrer qu'elles sont égales.

3.
Si y_1 et y_2 sont des polynômes de degré 2 ayant une racine commune r_1, alors

$$y_1(x) = s\,(x - r_1)\,(x - r_2)$$
$$y_2(x) = t\,(x - r_1)\,(x - r_3)$$

où s, t, r_1, r_2 et r_3 sont des réels quelconques avec $s \neq 0$ et $t \neq 0$.
Dans ce cas, prouvez que:

$$\lim_{x \to r_1} \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{y_1'(r_1)}{y_2'(r_1)}$$

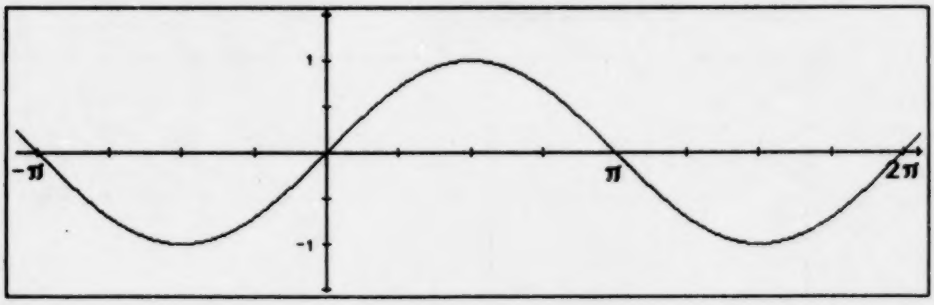
3.4 À la dérive sur les vagues de la fonction sinus

Préambule

L'étudiant doit connaître la définition de dérivée et son interprétation graphique.

Activité

Vous voyez ici le graphique de la fonction sin x où x doit être interprété comme la mesure d'un angle exprimé en radians. La même échelle a été utilisée sur chacun des deux axes. Les marques sur l'axe horizontal indiquent des multiples de $\pi/4$.



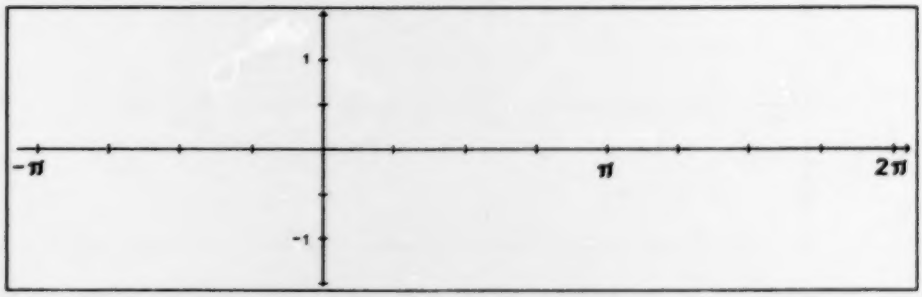
Sachant que la dérivée en un point exprime la pente de la courbe en ce point, estimez visuellement la dérivée de la fonction sin x aux points d'abscisse $-\pi$, $-3\pi/4$, $-\pi/2$, ... ,2π et remplissez la colonne centrale du tableau suivant.

x	estimation visuelle	estimation calculée
$-\pi$	.....	.....
$-3\pi/4$	.....	.....
$-\pi/2$	.....	.....
$-\pi/4$	.....	.....
0	.....	.....
$\pi/4$	.....	.....
$\pi/2$	.....	.....
$3\pi/4$	.....	.....
π	.....	.....
$5\pi/4$	.....	.....
$3\pi/2$	.....	.....
$7\pi/4$	.....	.....
2π	.....	.....

Afin de tester vos estimations, vous allez en faire d'autres, ces dernières basées sur un calcul numérique. La valeur de l'expression suivante:

$$\frac{\sin(x + 0.0000001) - \sin(x)}{0.0000001}$$

est une bonne approximation de la dérivée de la fonction sin x au point d'abscisse x (Pourquoi?). Pour faciliter vos calculs, entrez l'expression précédente dans le **SOLVER**. Il faut taper "(sin (x + 0.0000001) - sin x) / 0.0000001". Donnez à x les valeurs de la colonne de gauche du tableau précédent et demandez au calculateur de trouver la valeur correspondante de l'expression. Utilisez ces valeurs pour compléter la colonne de droite du tableau. Sur le plan cartésien suivant, placez les points déterminés par les colonnes 1 et 3 du tableau.



Le graphique de la fonction dérivée de sin x devrait passer près de ces points. Reliez les points. Vous devriez être en mesure d'établir une conjecture:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \text{.....}$$

Vous allez maintenant mettre cette conjecture à l'épreuve par une méthode graphique. En mode **GRAPH**, définissez les deux fonctions suivantes:

y1 = (sin (x + 0.0000001) - sin x) / 0.0000001
y2 = "la fonction conjecturée"

Le graphique de la fonction y1 est fort semblable à celui de la dérivée de sin x (vous devriez savoir pourquoi). Les graphiques de y1 et y2 sont-ils très ressemblants? Si non, revoyez votre conjecture. Si oui, poursuivez. La coïncidence entre les graphiques de y1 et y2 peut être plus facile à constater en procédant comme suit. Définissez

y3 = y2 - y1

Si y1 et y2 sont des fonctions très proches l'une de l'autre, y3 devrait être proche de 0. Désélectionnez y1 et y2 puis, affichez le graphique de y3 (de préférence en actionnant **AxesOff** de **FORMT** du menu **GRAPH**). Que voyez-vous? Faites quelques agrandissements **ZIN** avec les facteurs xFact = 1 et yFact = 4 tirés de **ZFACT** de **ZOOM**. Quelle est votre conjecture finale relativement à la dérivée de sin x?

3.5 Newton: à la recherche de ses racines

Préambule

Dans cette activité, nous visons l'exploration par l'étudiant de la méthode de Newton. Il est prévu à la fin du Math 101 que nous abordions cette méthode dans le thème des "Processus itératifs". C'est un beau lien entre l'étude des racines faite en Math 101 et le concept de dérivée vu en Math 103. De plus, cette exploration soulève plusieurs interrogations et les nombreux problèmes suivant cette activité en font foi. Dans ces problèmes, on y aborde les concepts de dérivée, de croissance, de décroissance, de concavité, d'asymptotes (verticale ou oblique), de fonction inverse, d'équations paramétriques... En définitive, puisque ce thème sera vu vers la fin du Math 101 (et forcément aussi vers la fin du Math 103), il peut servir d'occasion pour effectuer une belle synthèse de maints éléments du Math 103.

Activité

Une bille se déplace de gauche à droite sur la trajectoire d'équation

$$y = x^2 - 4x + 5.$$

Au point (–2, 17), elle quitte sa trajectoire selon la tangente à la courbe en ce point.

a) Est-ce que la bille atteindra une cible située en (4, 0)?

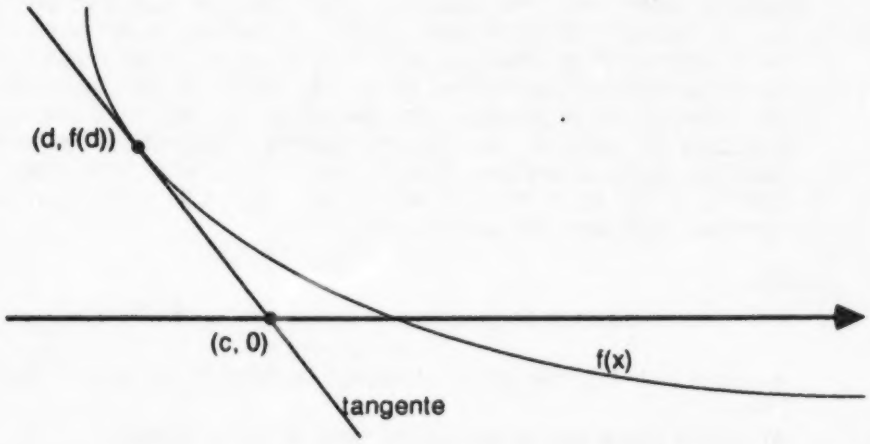
b) Pouvez-vous trouver un point sur la trajectoire de la bille où le résultat souhaité se réalisera?

Pour répondre à ces questions, tracez le graphique de $y1 = x^2 - 4x + 5$ dans une fenêtre d'affichage où xMin = –5, xMax = 8, yMin = –2 et yMax = 20. Maintenant, dans **GRAPH**, il y a sous le menu **DRAW**, la commande **TanLn** (pour "tangent line") qui permet de tracer une tangente en un point d'une courbe; il suffit de faire Tan Ln (arg1, arg2) où arg1 est le nom de la fonction en x considérée et arg2 l'abscisse du point de la courbe où l'on veut tracer la tangente.

Ainsi, pour $y1 = x^2 - 4x + 5$, en demandant **TanLn**, on nous transporte à l'écran **HOME** où **TanLn (y1,2)** suivi de **ENTER** ajoute immédiatement une tangente à la courbe de $x^2 - 4x + 5$ au point d'abscisse 2 (ici, c'est au point (2, 1)). Au moyen de cette commande, essayez de répondre aux questions a) et b). Pour vous aider, vous pouvez consigner vos essais dans les deux premières colonnes du tableau suivant (la troisième colonne sera remplie plus tard).

Abscisse du "point de départ"	Abscisse du "point de contact" (graphiquement)	Abscisse du "point de contact" (selon le SOLVER)
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....

De toute évidence, il y a une relation entre l'abscisse du "point de départ" (d) et l'abscisse du "point de contact" (c). Essayons de dégager cette relation. Dans le graphique suivant, le "point de départ" est (d, f(d)) et le "point de contact" est (c, 0).



c) En vous inspirant de ce graphique, établissez une relation entre d, c, f(d) et f'(d).

d) Quand $f(x) = x^2 - 4x + 5$, montrez que la relation précédente se particularise comme suit:

$$c = (d^2 - 5) / (2d - 4)$$

e) Au moyen du **SOLVER** et de la relation trouvée en **d)**, remplissez la troisième colonne du tableau de la page précédente. Qu'observez-vous?

f) Quelle est la réponse exacte à la question **b)**?

g) Maintenant, remplacez la trajectoire de la bille par la trajectoire "fictive"

$$y = x^2 - 7x + 12$$

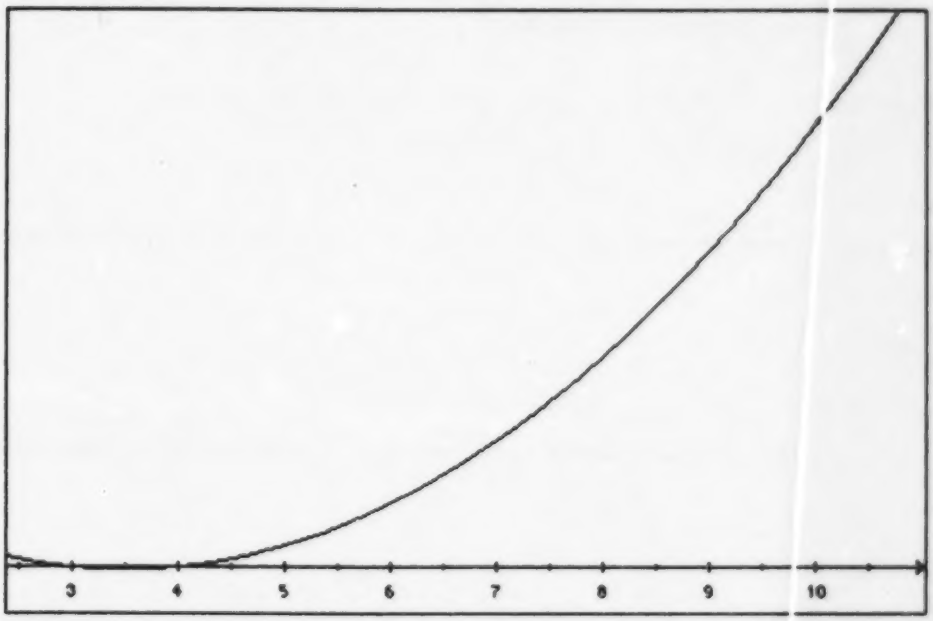
Tracez ce graphique et montrez que la relation entre d et c est:

$$c = (d^2 - 12) / (2d - 7)$$

h) Au moyen de la relation établie précédemment et du **SOLVER**, remplissez la deuxième colonne du tableau suivant.

Abscisse du "point de départ"	**Abscisse du "point de contact" (selon le SOLVER)**
10.5	.....
7	.....
5.3	.....
4.5	.....
4.1	.....

Dans le graphique ci-dessous, tracez manuellement chacune des cinq droites tangentes en reliant un "point de départ" avec son "point de contact". Que remarquez-vous?



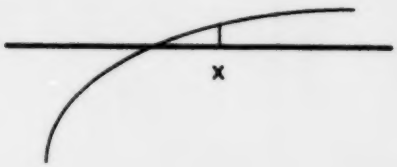
Pouvez-vous au moyen d'une commande unique (appliquée à cinq reprises) remplir toutes les lignes du tableau? Si oui, quelle est cette commande? Écrivez cette commande ci-dessous et testez-la. Quelle conjecture pouvez-vous émettre?

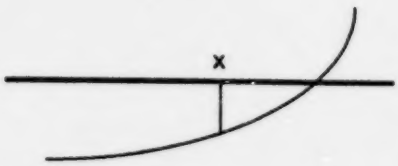
	Commande	Résultat
1.	.....	.....
2.	"	.....
3.	"	.....
4.	"	.....
5.	"	.....

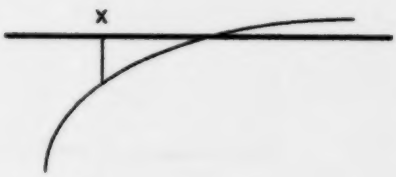
Exercices

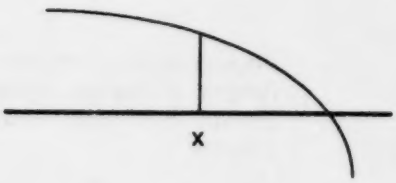
1.

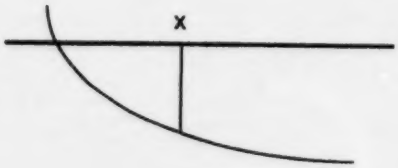
Pour une fonction f(x) différentiable, définissons $C(x) = x - (f(x)/f'(x))$. Dans chacun des graphiques suivants, dites si $C(x) > x$ ou si $C(x) < x$. Expliquer graphiquement et algébriquement vos réponses. Quelle régularité observez-vous dans tous ces résultats?

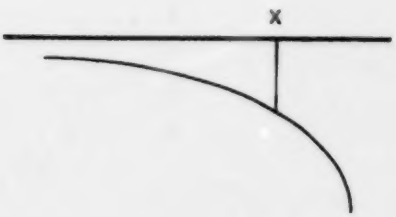












2.
Appliquez la méthode de Newton aux équations suivantes. Trouvez, si possible, une estimation d'une racine de ces équations au moyen d'une commande unique que vous répéterez à quelques reprises.

a) $x^2 - 2$
b) $\sin x = 0$
c) $(\ln x) - 1 = 0$
d) $x^3 + 2x^2 + 3x - 5 = 0$
e) $(\cos x) - x = 0$
f) $x^2 + 1 = 0$

3.
Faites un court programme pour pouvoir appliquer la méthode de Newton. L'amorce, le nombre d'itérations et l'équation à résoudre doivent pouvoir être déterminés par l'usager à l'intérieur du déroulement du programme. Ensuite, "étrennez" le programme pour trouver une racine à chacune des équations de la question précédente.

4.
a) Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, montrez que l'abscisse C(x) du point de rencontre de la tangente en (x, f(x)) avec l'axe des x est donnée par:

$$C(x) = (ax^2 - c) / (2ax + b)$$

b) Ce résultat est-il compatible avec les résultats obtenus avec

$$g(x) = x^2 - 4x + 5 \text{ et } h(x) = x^2 - 7x + 12 \text{ ?}$$

c) Pour $g(x) = x^2 - 4x + 5$, faites le graphique de C(x). À quoi ressemble ce graphique? Expliquez cette ressemblance.
d) Pour $h(x) = x^2 - 7x + 12$, essayez de prévoir le tracé de C(x).

5.
Dans cet exercice, vous allez analyser l'influence du facteur k lorsqu'on associe le polynôme kP(x) à sa fonction C(x). Pour ce faire, remplissez le tableau suivant en employant de façon appropriée la commande **TanLn**.

P(x)	k	kP(x)	Abscisse du "point de départ"	Abscisse du "point de contact"
$x^2 - 4x + 5$	2	.....	1	.....
$x^2 - 4x + 5$	3	.....	1	.....
$x^2 - 4x + 5$	4	.....	1	.....
$x^2 - 7x + 12$	2	.....	1	.....
$x^2 - 7x + 12$	3	.....	1	.....
$x^2 - 7x + 12$	4	.....	1	.....

b) Pour chacun des trois premiers polynômes du tableau, calculez C(x).
c) Que remarquez-vous? Quelle conjecture pouvez-vous émettre?

6.

Soit $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ où r_1 et r_2 sont des nombres réels quelconques tels que $r_1 < r_2$.

a) Prouvez que:

$$C(x) = (x^2 - r_1 r_2) / (2x - (r_1 + r_2))$$

et est donc une fonction indépendante de a.

b) Évaluez les limites suivantes.

$$\lim_{x \to -\infty} C(x) \qquad \lim_{x \to \infty} C(x)$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^+} C(x) \qquad \lim_{x \to \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^-} C(x)$$

Ces résultats sont-ils cohérents avec le graphique de C(x) pour $x^2 - 4x + 5$? Avec celui de C(x) pour $x^2 - 7x + 12$?

c) Dans le graphique C(x) associé à $x^2 - 4x + 5$, combien y-a-t-il d'asymptotes?, Quelle est l'expression algébrique de ces asymptotes? Vérifiez graphiquement et numériquement avec le **SOLVER** que vos expressions sont justes.

d) Dans le graphique C(x) associé à $x^2 - 7x + 12$, combien y-a-t-il d'asymptotes? Quelle est l'expression algébrique de ces asymptotes? Vérifiez graphiquement et numériquement avec le **SOLVER** que vos expressions sont justes.

e) De manière générale, écrivez l'équation de chaque des asymptote associée à $C(x) = (x^2 - r_1 r_2) / (2x - (r_1 + r_2))$. Ces résultats sont-ils cohérents avec ce que vous avez trouvé en **d)**?

7.

Montrez que $((r_1 + r_2) / 2, (r_1 + r_2) / 2)$ est un centre de symétrie du graphique de

$$C(x) = (x^2 - r_1 r_2) / (2x - (r_1 + r_2))$$

8.

En utilisant les équations paramétriques, on peut visualiser simultanément la fonction f(x) originale et sa fonction associée C(x).

a) Dans un premier temps, vous allez le faire pour $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en définissant:

$$xt1 = t$$
$$yt1 = t^2 - 4t + 5$$
$$xt2 = (t^2 - 5) / (2t - 4)$$
$$yt2 = 0$$

Pour bien voir ces tracés, effacez les deux axes en actionnant **AxesOff** et **SimulG** du menu **FORMT** de **GRAPH** puis, fixez dans **RANGE**:

tMin = –2	xMin = 0	yMin = –1
tMax = 2	xMax = 4	yMax = 4
t Step = 0.02	xScl = 1	yScl = 1

Maintenant, observez le graphique se tracer. Que notez-vous? Pouvez-vous expliquer géométriquement ces comportements? Pour mieux voir encore, faites varier t entre 0 et 2 pour la première portion du tracé et ensuite faites varier t entre 2 et 4 pour la deuxième portion du tracé.

b) Effacez les définitions de xt1, yt1, xt2 et yt2. Vous allez répéter le même travail qu'en **a)** pour la fonction $f(x) = x^2 - 7x + 12$. À cette fin, définissez:

$$xt1 = t$$
$$yt1 = t^2 - 7t + 12$$
$$xt2 = (t^2 - 12) / (2t - 7)$$
$$yt2 = 0$$

et fixez dans **RANGE**:

tMin = 0	xMin = 0	yMin = −1
tMax = 7	xMax = 7	yMax = 4
tStep = 0.02	xScl = 1	yScl = 1

Expliquez géométriquement le tracé de ces courbes. Encore une fois, pour mieux voir, faites varier t entre 0 et 3 pour la première portion du tracé et ensuite faites varier t entre 3 et 4 pour la deuxième portion du tracé et, finalement faites varier t entre 4 et 7 pour la dernière portion du tracé.

9.

Développez une expression générale pour C'(x) en fonction de x, r_1 et r_2. À partir de cette expression et celle de C(x), prouvez que:

a) $C(r_1) = r_1$ et $C(r_2) = r_2$.

b) $C'(r_1) = 0$ et $C'(r_2) = 0$.

c) Si $x < r_1$, alors

$C(x)$ est croissant et $x < C(x) < r_1$.

d) Si $r_1 < x < (r_1 + r_2) / 2$, alors

$C(x)$ est décroissant et $C(x) < r_1$.

e) Si $(r_1 + r_2) / 2 < x < r_2$, alors

$C(x)$ est décroissant et $C(x) > r_2$.

f) Si $x > r_2$, alors

$C(x)$ est croissant et $r_2 < C(x) < x$.

10.

a) Soit $f(x) = x^2 - 7x + 12$. Au moyen des équations paramétriques, vous allez tracer la relation inverse de C(x). À cette fin, définissez:

$$xt1 = t^2 - 7t + 12$$
$$yt1 = t$$

b) Pour f(x), montrez que la relation entre un point de contact d'abscisse x et un point de départ d'abscisse D(x) est donnée par:

$$D(x) = x \pm \sqrt{x^2 - 7x + 12}$$

Expliquez géométriquement pourquoi cette dernière relation n'est pas une fonction.

c) Tracez:

$$xt2 = t$$
$$yt2 = t + \sqrt{t^2 - 7t + 12}$$
$$xt3 = t$$
$$yt3 = t - \sqrt{t^2 - 7t + 12}$$

et comparez chacun de ces tracés avec celui de **a)**.

d) De façon générale, si $f(x) = a\,(x - r_1)\,(x - r_2)$, montrez que:

$$D(x) = x \pm \sqrt{(x - r_1)\,(x - r_2)}$$

e) Expliquez graphiquement et algébriquement pourquoi les valeurs de l'intervalle $[r_1, r_2]$ ne font pas partie du domaine de D(x).

f) En vous basant uniquement sur des considérations d'ordre graphique, déterminez la fonction inverse ainsi que le domaine de chacune des fonctions suivantes:

$$D_1(x) = x + \sqrt{(x - r_1)\,(x - r_2)}$$

et

$$D_2(x) = x - \sqrt{(x - r_1)\,(x - r_2)}$$

3.6 Cosinus, Newton, MacLaurin et Taylor

Préambule

Dans cette activité, vous allez explorer un comportement, à prime abord, surprenant de la fonction cosinus. Par le biais de la méthode de Newton, des séries de MacLaurin et des séries de Taylor, toutes illustrées graphiquement, vous allez expliquer le comportement observé. Cette activité requiert donc des étudiants des connaissances minimales de la méthode de Newton, des séries de MacLaurin et des séries de Taylor. En Math 101, l'activité peut très bien se limiter à la première partie comme introduction aux procédés itératifs. La partie qui traite des séries de MacLaurin et de Taylor pourrait être vue dans le cours de Math 203.

Activité

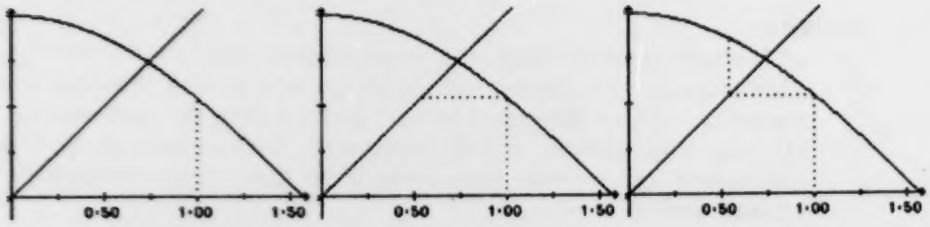
a) D'abord, dans **MODE**, choisissez **Radian** sur la troisième ligne car vous allez toujours travailler en radians dans cette activité. Ensuite, choisissez au hasard un nombre réel positif entre 0 et $\pi/2$. À partir de cette amorce (notons-la x), vous allez calculer cos(x), cos(cos(x)), cos(cos(cos(x))), ... Imaginez une commande, qui répétée suffisamment de fois, vous permettra de remplir le tableau suivant.

(N.B.: Pour alléger l'écriture, nous symboliserons cos(cos(x)) par $\cos_2(x)$, cos(cos(cos(x))) par $\cos_3(x)$ et ainsi de suite.)

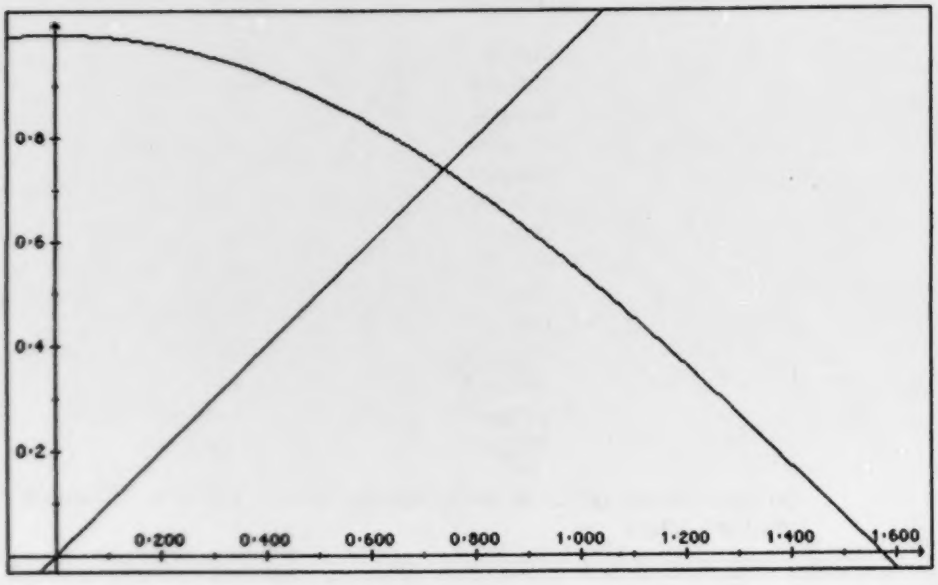
Expression	Valeur numérique
x	.....
cos(x)	.....
$\cos_2(x)$	.....
$\cos_3(x)$	.....
$\cos_4(x)$	.....
$\cos_5(x)$	.....
$\cos_6(x)$	.....
$\cos_7(x)$	.....
$\cos_8(x)$	.....
$\cos_9(x)$	.....
$\cos_{10}(x)$	.....
$\cos_{20}(x)$	.....
$\cos_{30}(x)$	.....
$\cos_{40}(x)$	.....
$\cos_{50}(x)$	.....

Qu'observez-vous? Quel est le résultat obtenu par vos coéquipiers ayant des amorces différentes?

b) Ce résultat peut être illustré graphiquement. À titre d'exemple, supposons que votre amorce est 1. Nous avons donc cos(1) = 0.540302305868. Sur le premier graphique ci-bas, nous traçons un segment de droite vertical reliant (1, 0) à (1, .5403...). Ensuite, il faut calculer cos(0.5403...); ainsi, nous voulons changer le "y" en "x". Pour cela, rejoignons la droite d'équation x = y au moyen du segment horizontal reliant le point (1, 0.5403...) à (0.5403..., 0.5403...). Ensuite, puisque cos(cos(1)) = 0.8776... , traçons le segment vertical partant du point (0.5403..., 0.5403...) de la droite bissectrice jusqu'au point (0.5403..., 0.8776...) de la courbe. La séquence "amorce-courbe", "courbe-bissectrice", "bissectrice-courbe" est illustrée ci-bas. Remarquez qu'une fois l'amorce lancée, il suffit de répéter la séquence "courbe-bissectrice-courbe" le nombre de fois requis.



En tenant compte de l'amorce que vous avez choisie, tracez le "chemin" de vos itérations successives en vous servant des 10 premières lignes du tableau numérique de la page précédente.



c) Le graphique que vous venez de compléter illustre ce qu'on appelle un "attracteur". En effet, quelle que soit l'amorce choisie, il semble que tous les "chemins" aboutissent au même point soit (0.739085133215, 0.739085133215). De plus, vous avez certainement remarqué que dans la suite cos(x), cos(cos(x)), cos(cos(cos(x)))... dès qu'on a obtenu cette valeur, l'itération suivante nous redonne la même valeur. En d'autres termes, pour x = 0.739085133215, on a cos(x) = x; c'est ce que l'on nomme un "point fixe". Maintenant, nous allons tenter de résoudre l'équation cos(x) = x ou encore x – cos(x) = 0 par la méthode de Newton. Prenons une amorce, disons 1 (ou une autre de votre choix mais pas trop éloignée de 1) puis, à l'aide d'une commande que vous pourrez répéter, remplissez le tableau suivant.

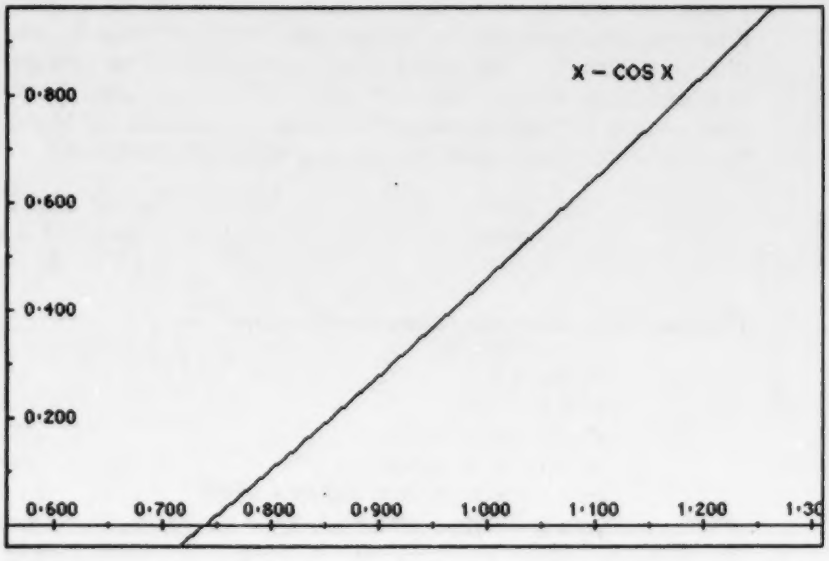
Commande

.....

Nombre d'itérations	Valeur approchée de la racine
1	.....
2	.....
3	.....
4	.....
5	.....

Les résultats de ce tableau confirment-ils les calculs du début?

Maintenant, vous allez tracer le chemin associé à la méthode de Newton en utilisant les valeurs que vous venez de calculer.



d) Maintenant, vous allez utiliser les séries de MacLaurin pour résoudre l'équation cos(x) = x. À cette fin, prouvez d'abord que la série de MacLaurin de la fonction cos(x) est:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

Ainsi, l'équation cos(x) = x peut se réécrire:

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots = x$$

Vous allez approcher la solution de cette équation en considérant un nombre croissant de termes appartenant au membre de gauche de cette équation. Pour faciliter l'écriture, posons $M_n(x)$, la somme des n premiers termes de la série de MacLaurin exprimant cos(x). Ensuite, à l'aide du **SOLVER**, remplissez le tableau suivant. Ces résultats sont-ils concluants?

Équation	Solution approchée
$M_2(x) = x$	.....
$M_3(x) = x$	.....
$M_4(x) = x$	.....
$M_5(x) = x$	.....
$M_6(x) = x$	.....
$M_7(x) = x$	.....

L'idée derrière les séries de MacLaurin et de Taylor est d'approcher quantité de fonctions différentiables au moyen de fonctions simples, les polynômes, qui n'utilisent que des opérations élémentaires. Certaines opérations, l'intégration et la dérivation entre autres, sont nettement plus simples. Dans ce qui suit, vous allez illustrer le "rapprochement" de la fonction cos(x) par $M_2(x)$, $M_3(x)$, $M_4(x)$, ... Pour cela, définissez d'abord l'écran d'affichage comme suit:

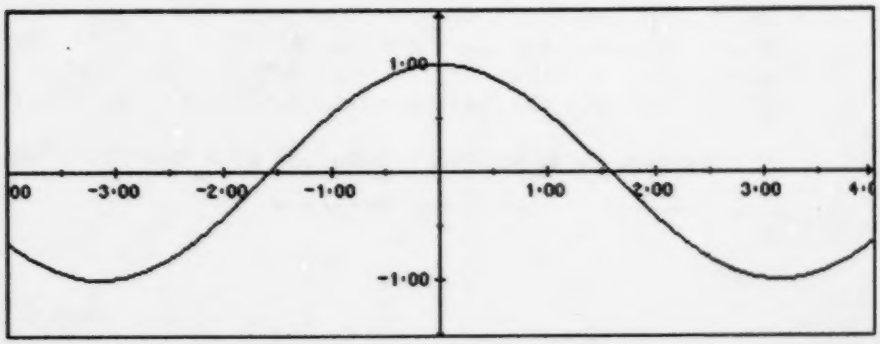
xMin = –4	yMin = –1.5
xMax = 4	yMax = 1.5
xScl = 1	yScl = 1

Ensuite, faites tracer successivement

$y1 = \cos x$	
$y2 = 1 - x^2/2!$	(bleu)
$y3 = 1 - x^2/2! + x^4/4!$	(rouge)
$y4 = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6!$	(vert)
$y5 = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8!$	(jaune)
$y6 = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! - x^{10}/10!$	(orange)

et notez leurs tracés approximatifs dans la graphique suivant en utilisant les couleurs proposées. Que remarquez-vous?

(N.B. Pour faciliter la définition des fonctions à faire tracer par le calculateur, entrez y3 = y2 + $x^4/4!$ et ainsi de suite pour y4, y5, ...)



e) Vous allez maintenant illustrer d'une façon différente comment les polynômes de MacLaurin de cos(x) approchent cette dernière fonction. Pour cela, définissez:

$$y7 = abs(y1 - y2)$$
$$y8 = abs(y1 - y3)$$
$$\ldots$$
$$y11 = abs(y1 - y6)$$

"abs" désigne "valeur absolue" et ces fonctions (y7, y8, ... , y11) déterminent l'erreur commise en prenant un polynôme de MacLaurin plutôt que la fonction que l'on veut approcher. Ne faites que tracer les fonctions y7 à y11 en prenant yMin = 0 et yMax = 0.001.Combien de termes doit-on prendre pour le polynôme de MacLaurin, pour que l'erreur d'approximation commise pour chaque nombre de l'intervalle [–4, 4] soit inférieure à 0.0001?

f) À cette étape-ci, vous allez reprendre sensiblement la même démarche qu'en d) sauf que vous allez utiliser un développement de cos(x) en séries de Taylor pour x près de 0.7. En premier lieu, pour alléger les écritures et faciliter la définition des fonctions à tracer, posez:

$$A = 0.7,\ C = \cos(0.7) \text{ et } S = \sin(0.7).$$

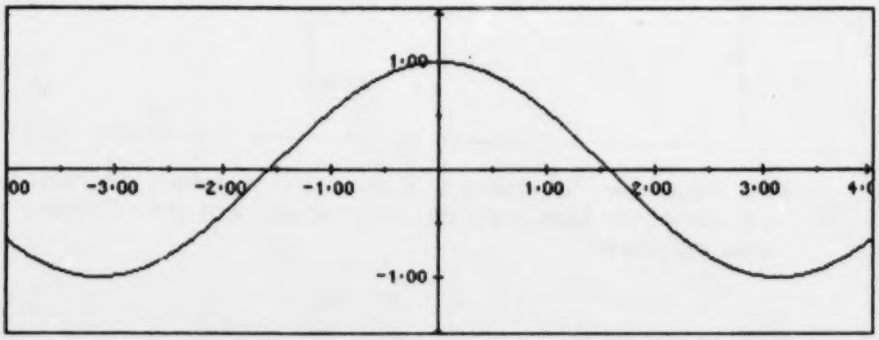
Pour le TI-85, il faut placer ces valeurs dans les variables en question.
Prouvez que le développement de Taylor de cos(x) autour de x = 0.7 donne:

$$C - S(x-A) - C\frac{(x-A)^2}{2!} + S\frac{(x-A)^3}{3!} + C\frac{(x-A)^4}{4!} - S\frac{(x-A)^5}{5!} - C\frac{(x-A)^6}{6!}$$

Maintenant, dans le même écran d'affichage que celui utilisé en d), tracez successivement:

y1 = cos x
y2 = C
y3 = C – S(x – A)
y4 = C – S(x – A) – C(x – A)^2/2!
y5 = C – S(x – A) – C(x – A)^2/2! + S(x – A)^3/3!
y6 = C – S(x – A) – C(x – A)^2/2! + S(x – A)^3/3! + C(x –A)^4/4!
y7 = C – S(x – A) – C(x – A)^2/2! + S(x – A)^3/3! + C(x –A)^4/4! –S(x – A)^5/5!

et notez leurs tracés approximatifs dans le graphique ci-bas. Que remarquez-vous?



Posons $T_n(x)$, le polynôme formé des n premiers termes de la série de Taylor exprimant cos(x). À l'aide du **SOLVER**, remplissez le tableau suivant. Les résultats sont-ils concluants? La convergence vers la racine est-elle plus rapide?

Équation	Solution approchée
$T_2(x) = x$	.....
$T_3(x) = x$	.....
$T_4(x) = x$	.....
$T_5(x) = x$	.....
$T_6(x) = x$	.....
$T_7(x) = x$	.....

g) À nouveau, vous allez illustrer d'une façon différente comment les polynômes de Taylor de cos(x) approchent cette dernière fonction. Pour cela, définissez:

y8 = abs(y1 – y2)
y9 = abs(y1 – y3)
...
y13 = abs(y1 – y7)

Ces fonctions déterminent l'erreur commise en prenant un polynôme de Taylor plutôt que la fonction que l'on veut approcher. Ne faites que tracer les fonctions y8 à y13 en prenant yMin = 0 et yMax = 0.001. Quelle est la différence avec l'écran que vous avez vu en **e)**? Combien de termes doit-on prendre pour le polynôme de Taylor, pour que l'erreur d'approximation commise dans l'intervalle [–4, 4] soit inférieure à 0.0001?

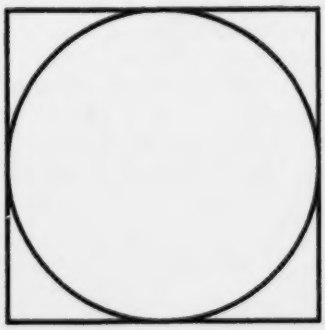
3.7 Le tour de π

Préambule

Dans cette activité, nous allons utiliser différents moyens pour estimer π. Parmi ces moyens, il y aura des simulations à saveur probabiliste, des approches géométriques, trigonométriques, des estimations basées sur la méthode de Newton, sur les séries de Taylor, sur le concept d'intégrale et même un calcul touchant aux nombres complexes. Ces différentes approches peuvent s'échelonner à l'intérieur des cours Math 101, Math 103 et Math 203.

Activité

1) Une poussière de météorite, de dimension négligeable, tombe à l'intérieur d'un terrain clôturé de 10 mètres sur 10 mètres contenant une piscine ronde dont le diamètre est de 10 mètres.

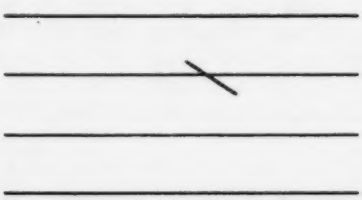


a) Quelle est la probabilité que cette poussière tombe dans la piscine? Que vaut 4 fois cette probabilité?

b) Écrivez un court programme permettant de simuler le choix d'un point de chute aléatoire à l'intérieur du terrain de 10 mètres sur 10 mètres. Pour vérifier si cet "essai" est un "succès", testez numériquement si ce point est à l'intérieur des limites de la piscine. En répétant cet essai à plusieurs reprises et en calculant la fréquence relative des succès, vous pourrez estimer la probabilité théorique trouvée en a). Vous pouvez également approcher la valeur de π en remplissant le tableau suivant. Notez que l'événement A signifie "le point de chute est à l'intérieur de la piscine".

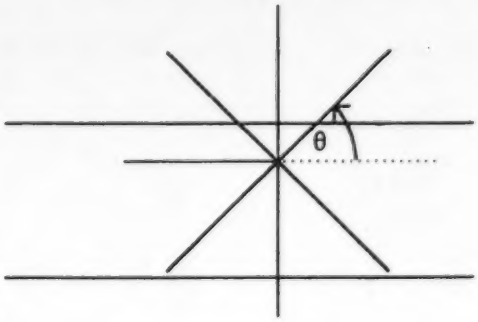
Nombre d'essais	Fréquence relative de A	4xFréquence relative de A
10	.....	.....
50	.....	.....
100	.....	.....
500	.....	.....
1000	.....	.....
5000	.....	.....

2) Une aiguille de longueur 1 est lancée, au hasard, sur une surface comportant des lignes parallèles distantes entre elles d'une longueur de 1. Vous allez tenter de calculer et d'estimer empiriquement la probabilité que l'aiguille atterrisse sur l'une de ces lignes.



a) Pour aider à visualiser cette situation, supposons qu'une extrémité de l'aiguille est bleue et l'autre, rouge. Il est clair que l'extrémité bleue va choir entre deux lignes ou, à la limite, sur une ligne. Cette observation devrait vous convaincre de restreindre l'espace échantillonnal à la région comprise entre deux lignes consécutives. De plus, si (x, y) est la position de l'extrémité bleue, la valeur de x n'a pas vraiment d'importance; en d'autres mots, la position horizontale de l'extrémité bleue peut être ignorée. Toutes ces considérations font qu'il est suffisant de regarder ce qui se passe entre deux lignes consécutives en faisant varier la position de l'extrémité bleue selon une verticale entre 0 et 1.

Que reste-t-il maintenant à déterminer? La position de l'extrémité rouge, bien sûr! On peut le faire en fixant l'angle que forme l'aiguille avec la partie positive de l'axe horizontal. À l'aide de ces commentaires, vous pouvez réaliser qu'il est possible de simuler le lancer d'une aiguille en faisant varier aléatoirement x, la position verticale de l'extrémité bleue, entre 0 et 1 et θ, l'angle que fait l'aiguille avec la partie positive de l'axe horizontal entre 0° et 360°. Dans le graphique suivant, on a illustré quelques positions d'une aiguille pivotant autour d'un point fixe.



À l'aide de ces observations, faites un court programme afin de simuler graphiquement 20 lancers de l'aiguille. Au moyen du nombre de "succès" obtenus, évalué visuellement, estimer la probabilité qu'une aiguille lancée au hasard coupe l'une des deux lignes.
(N. B.: Pour fin d'affichage, utiliser la fenêtre définie par xMin = –1.7, xMax = 1.7, yMin = –1 et yMax = 1.7; les lignes horizontales étant données par y1 = 1/2 et y2 = –1/2. De plus, au moyen de **LINE**, on peut faire afficher le segment de droite représentant l'aiguille; il suffit de préciser les coordonnées du point de départ (extrémité bleue) ainsi que les coordonnées du point d'arrivée (extrémité rouge).)

b) Trouvez le lien théorique entre x et θ lorsque le lancer résulte en un "succès", c'est-à-dire lorsque l'aiguille atterrit sur une ligne.

c) Faites un court programme pour simuler, sur un plan numérique seulement, un grand nombre de lancers. Ce programme devra cumuler le nombre de "succès" obtenus.

Programme

```
PROGRAM: BUFFON
: Disp "NOMBRE D'ESSAIS="
: Input E
: 0 → S
: For (T, 1, E, 1)
      : rand → x
      : 360° rand → B
      : S+((B ≤ 180) (abs(sin B) ≥ x)) + (B > 180) (abs(sin B) ≥1–x)) → S
: End
: Disp "FRÉQUENCE RELATIVE=", S/E
```

Transcrivez vos résultats et calculez la fréquence relative de "succès" ainsi que (2/ Fréquence relative).

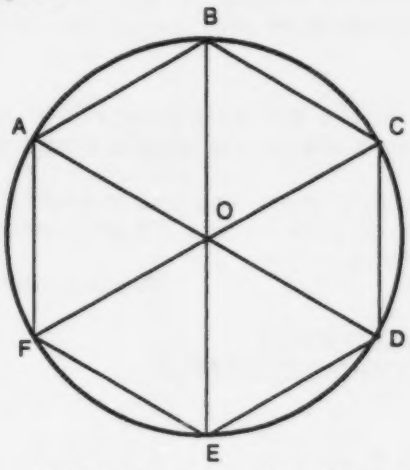
Nombre d'essais	Nombre de "succès"	Fréquence relative	2/Fréquence relative
50	.....	.....	.....
100	.....	.....	.....
500	.....	.....	.....
1000	.....	.....	.....

d) À partir de ces résultats, quelle conjecture pouvez-vous émettre quant à la valeur de la probabilité cherchée?

e) Prouvez que la probabilité cherchée est égale à $2 / \pi$.

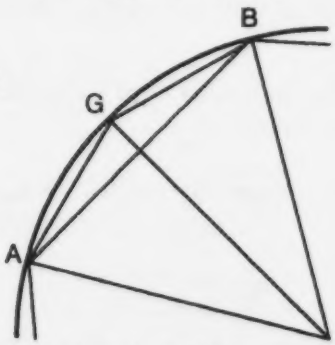
3) Dans cette partie de l'activité, vous allez suivre une approche géométrique classique afin d'estimer la valeur de π. Pour cela, vous allez calculer le périmètre de polygones réguliers inscrits dans un cercle de rayon égal à 1/2 en faisant croître le nombre de côtés indéfiniment.

a) La figure suivante illustre un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon égale à 1/2. À l'aide d'arguments géométriques, trouvez la valeur du périmètre de cet hexagone.



b) Doublons le nombre de côtés. G est le point milieu de l'arc entre A et B. Si x représente la longueur du segment AB et y, la longueur du segment AG, prouvez que:

$$y = \sqrt{0.5 - 0.5\sqrt{1 - x^2}}$$



c) Quelle est la valeur du périmètre du dodécagone régulier formé?

d) Soit C_k, la longueur du côté d'un polygone régulier à k côtés inscrit dans un cercle de rayon égal à 1/2. Quel est le lien algébrique entre C_6 et C_{12}? entre C_{12} et C_{24}? et de manière générale entre C_k et C_{2k}? (où k est de la forme 6×2^N pour N, un naturel quelconque.)

e) À l'aide de la relation générale entre C_k et C_{2k}, imaginez une séquence d'instructions que vous pourrez répéter pour rafraîchir les valeurs de N, de $6x2^N$ et du périmètre vous permettant de remplir la troisième colonne du tableau suivant. Qu'arrive-t-il?

N	Nombre de côtés ($6x2^N$)	Périmètre du polygone	Périmètre du polygone
0	6	.....	.....
1	6x2	.....	.....
2	$6x2^2$	.....	.....
3	$6x2^3$	.....	.....
4	$6x2^4$	.....	.....
5	$6x2^5$	.....	.....
10	$6x2^{10}$	.....	.....
15	$6x2^{15}$	.....	.....
20	$6x2^{20}$	.....	.....
25	$6x2^{25}$	.....	.....

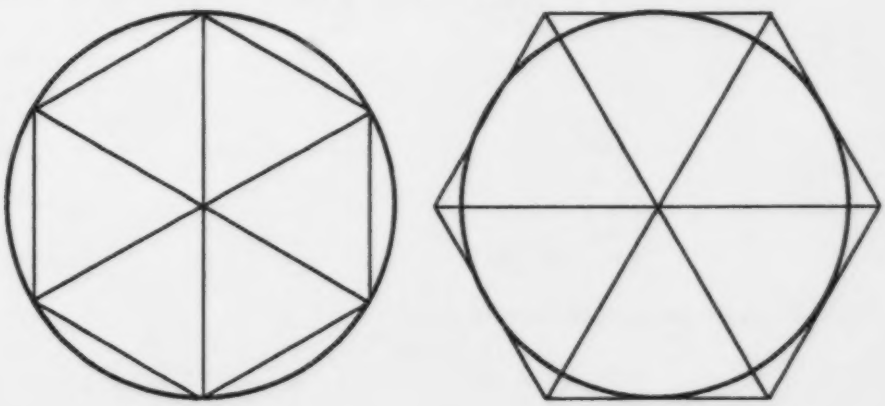
f) Pour améliorer les calculs du périmètre, modifions l'expression algébrique liant C_k et C_{2k} où k est de la forme $6x2^N$. À cette fin, prouvez que:

$$C_{2k} = \frac{C_k}{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - C_k^2}}}$$

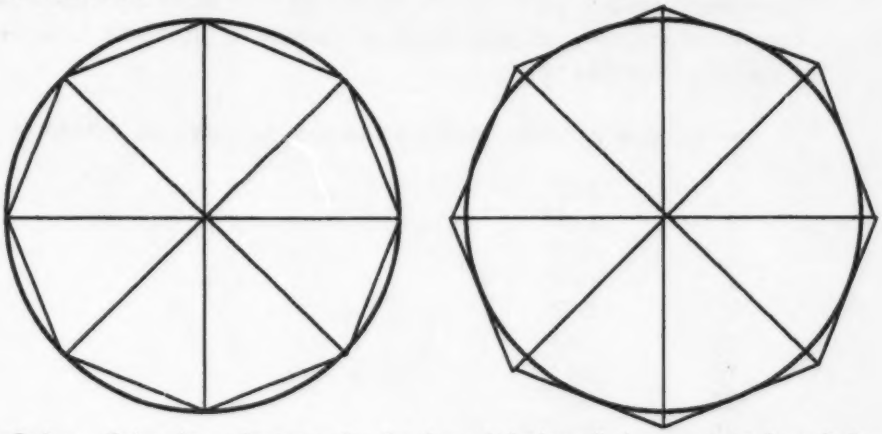
Avec cette nouvelle expression, remplissez la quatrième colonne du tableau précédent Qu'arrive-t-il?

4) Dans cette partie de l'activité, vous allez estimer π en calculant l'aire de polygones réguliers inscrits (ou circonscrits) de n côtés à un cercle de rayon unitaire quand n grandit indéfiniment.

a) Dans la figure suivante sont représentés des hexagones réguliers, l'un inscrit et l'autre circonscrit, à un cercle de rayon unitaire. À l'aide de la trigonométrie, trouvez l'aire de chacun de ces polygones.



b) Faites de même avec des octogones réguliers inscrit et circonscrit à un cercle unitaire.



c) Soit a_n, l'aire du polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle unitaire et A_n, l'aire du polygone régulier à n côtés circonscrit au même cercle. À l'aide des figures suivantes, démontrez que:

$$a_n = \frac{n \sin \frac{360°}{n}}{2} \quad \text{et} \quad A_n = n \tan \frac{180°}{n}$$

d) Remplissez le tableau suivant à l'aide du **SOLVER**. Quelle conjecture pouvez-vous émettre?

n	a_n	A_n
10	.....	.....
100	.....	.....
1 000	.....	.....
10 000	.....	.....
100 000	.....	.....
1 000 000	.....	.....
1 000 000 000	.....	.....

e) Prouvez algébriquement que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \sin \frac{2\pi}{n}}{2} = \pi \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} n \tan \frac{\pi}{n} = \pi$$

5) Trouvez une solution à l'équation sin x = 0 en utilisant la méthode de Newton.

a) Avec 2 comme amorce, quelle solution devriez-vous approcher? Testez ce résultat graphiquement.

b) Remplissez le tableau suivant:

Nombre d'itérations	Solution approchée
1	.....
2	.....
3	.....
4	.....
5	.....
6	.....
7	.....
8	.....
9	.....
10	.....

c) Quel degré de précision avez-vous obtenu?

d) Trouvez une solution à l'équation cos x = –1 en utilisant la méthode de Newton. Avec –0,5 comme amorce, quelle solution devriez-vous approcher? Testez ce résultat graphiquement.

e) Remplissez le tableau suivant:

Nombre d'itérations	Solution approchée
1	.....
2	.....
3	.....
4	.....
5	.....
6	.....
7	.....
8	.....
9	.....
10	.....

f) Quel degré de précision avez-vous obtenu?

6) Dans cette activité, vous allez estimer la valeur de π au moyen de polynômes de MacLaurin.

a) Prouvez que le développement de arctan x en série de MacLaurin s'exprime comme suit:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

b) Quelle est la valeur exacte de 4 arctan 1?

c) À quelle série équivaut 4 fois le développement de MacLaurin de arctan x quand x égale 1?

d) À l'aide du calculateur, remplissez le tableau suivant où le nombre de termes de la série décrite en c) croît.

Nombre de termes	Valeur numérique du développement en série de MacLaurin
5	.....
25	.....
50	.....
100	.....
500	.....
1000	.....

e) Que pensez-vous de la vitesse de convergence de cette série?

f) Quelle est la valeur exacte de 6 arctan($1/\sqrt{3}$)?

g) À quelle série équivaut 6 fois le développement de MacLaurin de arctan x quand x vaut $1/\sqrt{3}$?

h) À l'aide du calculateur, remplissez le tableau suivant où le nombre de termes de la série décrite en g) croît.

Nombre de termes	Valeur numérique du développement en série de MacLaurin
5	.....
25	.....
50	.....
100	.....
500	.....
1000	.....

i) Que pensez-vous de la vitesse de convergence de cette série?

7) Vous savez que les racines n-ièmes de l'unité sont disposées de manière équidistante sur un cercle unitaire centré à l'origine du plan complexe (appelé plan d'Argand). Nous allons vérifier que lorsque n grandit indéfiniment la somme des distances entre deux racines consécutives tend vers 2π.

a) Supposons pour n (naturel quelconque), que les n racines n-ièmes de l'unité sont identifiées sur le cercle unitaire centré à l'origine. Comme 1 est toujours racine n-ième de l'unité, le point (1, 0) sera identifié comme racine sur le cercle unitaire. Disons que c'est la "première" racine et que les autres seront numérotées dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Quelle sera alors l'expression de la deuxième racine?

b) Prouvez que la distance entre ces deux premières racines est donnée par:

$$\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}$$

c) Avec l'aide du **SOLVER**, remplissez le tableau suivant:

n	$\frac{n\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}}{2}$
3	.....
4	.....
5	.....
10	.....
15	.....
25	.....
100	.....
1 000	.....
10 000	.....

Quelle conjecture pouvez-vous émettre?

d) Prouvez algébriquement que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}}{2}=\pi$$

8) Dans cette activité, vous allez calculer la valeur de π au moyen d'intégrales.

a) Quel devrait être le tracé de la fonction

$$\sqrt{1-x^2}$$

pour x variant de 0 à 1? Vérifiez votre réponse à l'aide de votre calculateur.

b) Quelle devrait être la valeur numérique de

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx\ ?$$

c) À l'aide de la commande **fInt**, vérifiez votre réponse en **b)**.

d) Prouvez que:

$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \pi$$

Suggestion: faire le changement de variable $x = \sin z$.

e) Vérifiez à l'aide de la commande **arc** du menu **CALC** que la longueur de la courbe de la fonction

$$\sqrt{1-x^2}$$

entre –0.5 et 0.5 est égale à $\pi/3$. Trois fois ce résultat donne donc π.

f) De manière théorique, pour une fonction f différentiable sur un intervalle [a, b], la longueur de la courbe représentant f entre les points d'abscisse a et b est donnée par

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

À l'aide de cette formule, prouvez que trois fois la longueur de la courbe représentant

$$\sqrt{1-x^2}$$

entre –0.5 et 0.5 égale π.

3.8 Un peu de lumière sur Euler et son nombre

Préambule

L'essentiel de la présente activité est d'introduire le nombre d'Euler (e) et de voir pourquoi il est privilégié dans le traitement des fonctions exponentielles et logarithmiques quand le calcul différentiel et intégral intervient. L'étudiant doit connaître les principales caractéristiques des fonctions exponentielles et logarithmiques (domaine, image, allure graphique, lois des exposants et des logarithmes). Il doit bien maîtriser le lien d'inversibilité entre la fonction exponentielle de base a et la fonction logarithme de même base. Nous avons greffé à cette activité l'étude de situations faisant intervenir le nombre e et demandant des connaissances mathématiques plus poussées. Ainsi, certaines parties peuvent être réalisées en Math 103 alors que d'autres devront l'être en Math 203.

Activité

a) Considérons la fonction exponentielle de base 2.

$$f(x) = 2^x$$

Posez y1 = 2^x et faites tracer son graphique. Son domaine est $\Re$ et son image $\Re^+$; elle semble continue et différentiable. Quelle est la fonction dérivée de f(x)? Nous allons tenter de répondre à cette question. Faites tracer par le calculateur une courbe approchant celle de f '(x). Par exemple, le graphique de la fonction suivante répond à ces conditions.

$$y2 = (2^{(x + 0.000001)} - 2^x) / 0.000001$$

Le graphique de la fonction y2 semble posséder plusieurs des attributs des fonctions décrivant des phénomènes exponentiels.

b) À l'aide du **SOLVER**, remplissez le tableau suivant en écrivant les résultats avec 4 décimales.

x	y2 (≈ f'(x))
0	.....
1	.....
2	.....
3	.....

Observez les nombres de la colonne de droite. Montrez qu'ils sont en progression géométrique. Il est donc raisonnable de penser que

$$f'(x) = k\ 2^x$$

À l'aide de vos résultats, déterminez la valeur de k?

c) Reprenez la partie **b)** en remplaçant la fonction $f(x) = 2^x$ par $g(x) = 3^x$.

x	y2 (≈ g'(x))
0	.....
1	.....
2	.....
3	.....

Ici encore, on peut penser que $g'(x) = k\ 3^x$. Déterminez cette nouvelle valeur de k.

d) Les fonctions dérivées de 2^x et 3^x laissent entrevoir un "pattern" général applicable à toutes les fonctions exponentielles. À l'aide de la définition de dérivée, démontrez que:

$$\text{Si } f(x) = a^x \text{ alors } f'(x) = k\,a^x \text{ où } k = f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Note: La valeur de k dépend de a et représente la pente de la courbe associée à a^x au point d'abscisse 0.
Quelle doit être la valeur de la base a pour que k égale 1? Autrement dit, pour quelle valeur de a aura-t-on?

$$\frac{d\,a^x}{dx} = a^x$$

Cette base joue un rôle de première importance dans le domaine des fonctions exponentielles et logarithmiques.

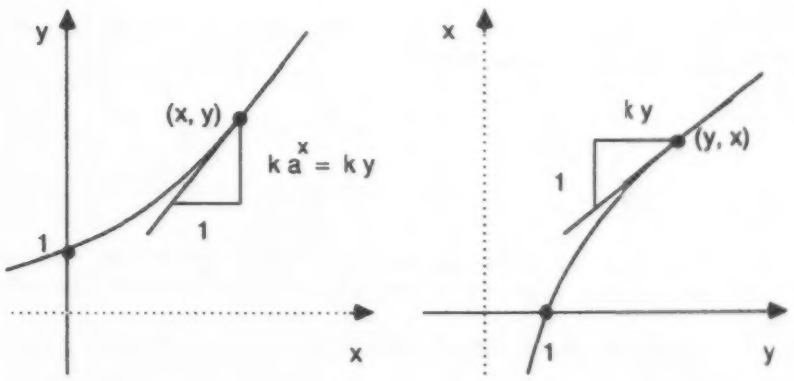
En **b)** et **c)**, vous auriez dû trouver respectivement que

$$\frac{d\,2^x}{dx} \approx 0.6931 \cdot 2^x \text{ et } \frac{d\,3^x}{dx} \approx 1.0986 \cdot 3^x$$

La "base magique" devrait donc se situer entre 2 et 3.

e) Passons maintenant aux logarithmes de base a. La figure suivante devrait vous aider à déduire

$$\frac{d \log_a(y)}{dy} = \frac{1}{k\,y} \text{ (***) de } \frac{d\,a^x}{dx} = k\,a^x$$



La fonction exponentielle de base a et une tangente

La fonction logarithme de base a et une tangente

Le graphique de droite est obtenu de celui de gauche par une symétrie par rapport à l'axe vertical suivi d'une rotation de 90° de sens horaire autour de l'origine. Ceci a pour effet d'interchanger les deux axes.

De l'égalité (***), nous pouvons déduire que la pente de la fonction logarithme de base a au point d'abscisse 1 est 1/ k.

$$\frac{d \log_a (y)}{dy} \Big|_{y=1} = \frac{1}{k}$$

Explicitons cette égalité.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log_a (1+h) - \log_a (1)}{h} = \frac{1}{k}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a (1+h) = \frac{1}{k}$$

$$\lim_{h \to 0} \log_a (1+h)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{k}$$

Puisque la fonction logarithme est continue, la dernière égalité devient:

$$(\#\#\#) \quad \log_a \left(\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right) = \frac{1}{k}$$

Cette dernière égalité fait intervenir un limite remarquable mais ne perdons pas de vue que nous cherchons la base a qui rendra k égal à 1. Maintenant, définissons e de la façon suivante:

$$e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

Avant d'estimer la valeur de e, remarquons que si l'on prend a égal à e comme base de la fonction logarithmique, la pente de cette fonction au point d'abscisse 1 sera

$$\log_e (e) = \frac{1}{k}$$

et il s'en suivra que k sera égal à 1; ce que nous voulions.

f) Estimons le nombre e. Vaut-il 1? Vaut-il l'infini? En d), nous l'avions estimé à une valeur entre 2 et 3. Remplissez les tableaux suivants à l'aide du **SOLVER**.

h	$(1+h)^{(1/h)}$	
1/100	$(1 + 1/100)^{100} =$	.....
1/1 000	$(1 + 1/1\,000)^{1\,000} =$	.....
1/10 000	$(1 + 1/10\,000)^{10\,000} =$	.....
1/100 000	$(1 + 1/100\,000)^{100\,000} =$	.....
1/1 000 000	$(1 + 1/1\,000\,000)^{1\,000\,000} =$	.....
1/10 000 000	$(1 + 1/10\,000\,000)^{10\,000\,000} =$	.....
1/100 000 000	$(1 + 1/100\,000\,000)^{100\,000\,000} =$	.....

h	$(1 + h)^{(1/h)}$	
$-1/100$	$(1 - 1/100)^{-100} =$	.....
$-1/1\ 000$	$(1 - 1/1\ 000)^{-1\ 000} =$	.....
$-1/10\ 000$	$(1 - 1/10\ 000)^{-10\ 000} =$	.....
$-1/100\ 000$	$(1 - 1/100\ 000)^{-100\ 000} =$	.....
$-1/1\ 000\ 000$	$(1 - 1/1\ 000\ 000)^{-1\ 000\ 000} =$	.....
$-1/10\ 000\ 000$	$(1 - 1/10\ 000\ 000)^{-10\ 000\ 000} =$	.....
$-1/100\ 000\ 000$	$(1 - 1/100\ 000\ 000)^{-100\ 000\ 000} =$	.....

donc: $e \approx$ ..... .

Confrontez cette valeur avec celle qui est préprogrammée dans le TI-85. La fonction exponentielle qui utilise e comme base est dite "exponentielle naturelle" tandis que les logarithmes de base e sont dits "naturels" et notés "ln".

Visualisez le graphique de la fonction $(1 + x)^{1/x}$ au voisinage de 0. Que constatez-vous?

Les séries de calculs qui précèdent nous suggèrent d'autres façons de définir le nombre e. Ainsi, le nombre e aurait pu être défini comme suit:

$$e = \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$$

Ou encore:

$$e = \lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$$

Exercice

1. Démontrez l'égalité suivante:

$$\frac{1}{e} = \lim_{x \to \infty} (1 - \frac{1}{x})^x$$

g) De l'égalité **(###)** de la section **e)**, on tire immédiatement que quelle que soit la base a:

$$\log_a(e) = 1/k \text{ et } k = 1/\log_a(e) = \ln(a)$$

Les valeurs de k estimées en **b)** et **c)** sont-elles cohérentes avec ce résultat?

Nous pouvons donc énoncer les formules de dérivation des fonctions exponentielles et logarithmiques comme suit:

$$\frac{d\,a^x}{dx} = \ln(a) \cdot a^x \text{ (en particulier, } \frac{d\,e^x}{dx} = e^x)$$

$$\frac{d\,\log_a(x)}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \text{ (en particulier, } \frac{d\,\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x})$$

Les cas particuliers démontrent bien la facilité de calcul qu'amène le nombre e quand il est sélectionné comme base d'exponentielle et de logarithme. Voici maintenant quelques nouvelles façons d'estimer la valeur du nombre e.

h) Montrez que l'équation suivante admet e comme solution.

$$1 - \ln(x) = 0$$

Solutionnez cette équation par la méthode de Newton et remplissez le tableau suivant.

Nombre d'itérations	Solution approchée
1	.....
2	.....
3	.....
4	.....
5	.....
6	.....
7	.....

i) Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral nous permet d'affirmer:

$$\int_1^z \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_{x=1}^{x=z} = \ln(z) \text{ pour } z \geq 1$$

En particulier, si z = e:

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$$

Pour estimer e, il suffira de résoudre pour z l'équation suivante (avec le **SOLVER**):

$$\int_1^z \frac{1}{x}\,dx = 1$$

j) Montrez que la série de MacLaurin qui exprime la fonction e^x est la suivante:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Estimez la valeur de e en prenant x = 1 et en additionnant les premiers termes de cette série. Entrez vos résultats dans le tableau suivant.

Nombre de termes	Résultat de la somme
1	.....
2	.....
3	.....
4	.....
5	.....
6	.....
7	.....
8	.....
9	.....
10	.....
11	.....
12	.....

k) On a établi précédemment (voir **d**)) que:

$$\frac{d\,a^x}{dx} = k \cdot a^x$$

où la constante k dépend de a. Vous allez à nouveau rechercher la valeur de la base a qui rend k égal à 1 mais, nous le ferons différemment. Par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, on a:

$$\int_0^1 k \cdot a^x\,dx = a^x\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$k\int_0^1 a^x\,dx = a - 1$$

$$k = \frac{a-1}{\int_0^1 a^x\,dx}$$

Pour trouver la valeur de a qui rend k égal à 1, il suffira donc de résoudre pour a l'équation suivante:

$$\int_0^1 a^x\,dx = a - 1$$

Faites-le avec le **SOLVER**.

I) Dans la présente activité, vous allez estimer la valeur du nombre d'Euler(e) de manière empirique en faisant des simulations.

I.1) À toutes les semaines, vous participez à une loterie. Cette loterie comporte 10 numéros: 1, 2, ... , 10 et votre numéro est toujours le même soit le 7. À chaque semaine, pendant 10 semaines consécutives, un numéro est tiré. Vous allez étudier la probabilité que votre numéro ne soit jamais tiré lors de ces 10 tirages. Construisez un programme qui simulera 100 fois cette séquence de 10 tirages. À l'aide de ce programme, calculez la fréquence relative de l'événement A où A signifie "Mon numéro n'est tiré à aucun des 10 tirages.". Calculez également la probabilité de A et inscrivez ces résultats ci-dessous.

fréquence relative de A = ...
probabilité théorique de A = ...

I.2) Vous allez maintenant répéter la partie I.1) avec cette fois 100 loteries hebdomadaires comportant 100 numéros: 1, 2, ... , 100. Votre numéro demeure le "7" et vous participez à 100 tirages hebdomadaires consécutifs. L'événement considéré est:

A: Mon numéro n'est tiré à aucun des 100 tirages.

Modifiez le programme de la partie I.1) de façon à tenir compte de cette nouvelle donnée et utilisez-le pour calculer la fréquence relative de A pour une séquence de 100 tirages répétée à 100 reprises. De même, calculez la probabilité théorique de A.

fréquence relative de A = ...
probabilité théorique de A = ...

I.3) Généralisons cette situation et voyons le lien avec le nombre d'Euler. Pour ce faire, il suffit de considérer N tirages hebdomadaires consécutifs comportant les numéros 1, 2, ... , N (N > 7). Votre numéro est le "7" et l'événement A qui nous intéresse est:

A: Mon numéro n'est tiré à aucun des N tirages.

Démontrez que la probabilité théorique de A est

$$P(A) = (1 - \frac{1}{N})^N$$

Et le lien avec e? De l'exercice de la partie f), on peut tirer:

Plus N est grand, plus $(1 - \frac{1}{N})^N$ s'approche de $\frac{1}{e}$.

Ainsi, les valeurs empiriques que vous avez trouvées en I.1) et I.2) sont des valeurs approchées de 1/e. En inversant ces valeurs, vous obtiendrez des valeurs approchées de e. Jugez de la qualité des estimations.

3.9 La corde, le carré et le cercle: une excursion en probabilités

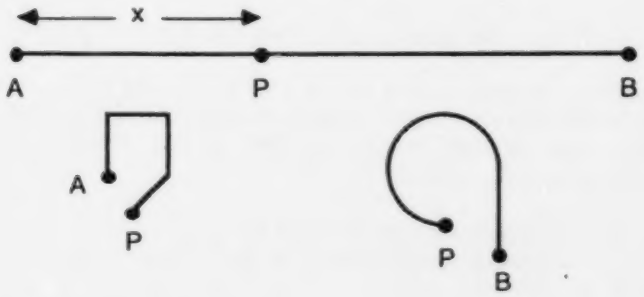
Préambule

Cette activité en est une de résolution de problème. Faite dans un contexte probabiliste, elle demande des connaissances minimales en algèbre et en probabilité géométrique. L'intérêt de cette activité consiste principalement dans la variété des approches utilisées pour arriver à une solution. Du même coup, ces approches illustreront plusieurs manières de tirer partie de la puissance graphique et numérique du calculateur.

Activité

On a une corde de 10 mètres de longueur sur laquelle on choisit un point au hasard. Avec la première partie de la corde, on forme le contour d'un carré et avec la seconde, on forme un cercle. Quelle est la probabilité que l'aire du carré soit plus grande que celle du cercle?

a) On choisit un point P au hasard sur la corde. La distance (en mètres) entre ce point P et l'extrémité gauche de la corde est symbolisée par x.



Pour le carré:

- le périmètre est égal à x
- la longueur d'un côté est x / 4
- l'aire du carré sera donc $(x / 4)^2$

Pour le cercle:

- la circonférence est égale à 10 – x
- la longueur du rayon du cercle est égale à $(10 - x) / (2\pi)$
- l'aire du cercle sera donc

$$\pi\left(\frac{10-x}{2\pi}\right)^2$$

Si P fait partie de la région des cas favorables, x doit donc respecter l'inégalité suivante:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 > \pi\left(\frac{10-x}{2\pi}\right)^2 \text{ ou encore } \frac{x^2}{16} > \frac{x^2-20x+100}{4\pi}$$

b) En utilisant le menu **TEST** du calculateur, déterminez approximativement la probabilité cherchée. Graphiquement, il est clair que la région des cas favorables sera constituée d'un seul intervalle. Il suffit donc de déterminer ce point de "cassure" délimitant la région des cas favorables de celle des cas non favorables. Avec le menu **TEST**, on peut vérifier si des affirmations comportant les symboles =, ≠, >, ≥, <, ≤ sont valides. Ainsi, à l'écran **HOME**, la séquence de commandes "1 → x : (x^2 / 16) > ((x^2 – 20x + 100) / 4π)" va offrir "0" comme réponse signifiant que le remplacement de x par 1 ne respecte pas l'inéquation en question. En faisant **ENTRY**, et en modifiant le nombre devant "→ x", on obtient:

2 → x :	(x^2 / 16) > ((x^2 – 20x + 100) / 4π) qui donne	0
3 → x :	(x^2 / 16) > ((x^2 – 20x + 100) / 4π) qui donne	0
4 → x :	(x^2 / 16) > ((x^2 – 20x + 100) / 4π) qui donne	0
5 → x :	(x^2 / 16) > ((x^2 – 20x + 100) / 4π) qui donne	0
6 → x :	(x^2 / 16) > ((x^2 – 20x + 100) / 4π) qui donne	1
7 → x :	(x^2 / 16) > ((x^2 – 20x + 100) / 4π) qui donne	1
8 → x :	(x^2 / 16) > ((x^2 – 20x + 100) / 4π) qui donne	1
9 → x :	(x^2 / 16) > ((x^2 – 20x + 100) / 4π) qui donne	1

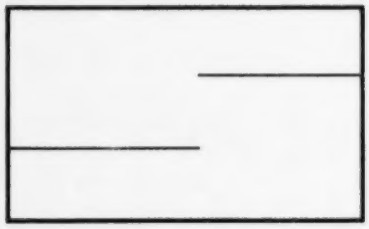
La région des cas favorables "débute" donc entre 5 et 6 mètres, ce qui laisse entrevoir une probabilité entre 40% et 50%. Par ailleurs, on pourrait effectuer plusieurs tests en utilisant **GRAPH**. En effet, définissons

$$y1 = (x^2 / 16) > ((x^2 - 20x + 100) / 4\pi)$$

avec un **RANGE** déterminé par

xMin = 0	yMin = –1
xMax = 10	yMax = 2
xScal = 1	yScal = 1

Pour mieux visualiser, on peut demander **AxesOff** de **FORMT** dans **GRAPH**. Voici le graphique que nous obtenons.



Avec **TRACE**, on observe que le point de cassure est entre 5.23... et 5.31... ce qui donne une probabilité entre 46.9% et 47.7%. Des agrandissements (**ZIN**) successifs auraient pour effet d'augmenter le degré de précision.

c) Vous pouvez également comparer les représentations graphiques des membres de gauche et de droite de l'inéquation

$$(x\text{^}2 / 16) > ((x\text{^}2 - 20x + 100) / 4\pi)$$

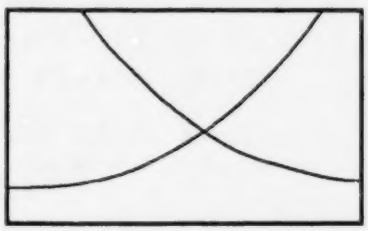
À cet effet, effacez y1 puis définissez:

$$y1 = x^2 / 16$$
$$y2 = (x^2 - 20x + 100) / 4\pi$$

avec l'écran d'affichage (**RANGE**) déterminé par:

xMin = 0	yMin = –1
xMax = 10	yMax = 5
xScal = 1	yScal = 1

En demandant le tracé des fonctions y1 et y2, on obtient:



Avec cette représentation, on peut noter que y1 est d'abord sous y2; ensuite en regardant vers la droite, ces courbes se coupent puis, y1 se retrouve au-dessus de y2. Le point d'intersection constitue donc le point de "cassure" et avec **TRACE**, il est estimé à 5.3174... ; ce qui nous donne une valeur approchée de la probabilité cherchée légèrement inférieure à 47%.

d) Vous pouvez également transformer l'inéquation afin de pouvoir travailler avec un polynôme. En effet, de simples manipulations algébriques réduisent

$$\frac{x^2}{16} > \frac{x^2 - 20x + 100}{4\pi}$$

à:
$$(\pi - 4)\, x^2 + 80x - 400 > 0.$$

Maintenant, effacez y1 et y2, puis définissez:

$$y1 = (\pi - 4)\, x^2 + 80x - 400$$

Avec **GRAPH**, voici le tracé obtenu.

Avec **TRACE**, on peut estimer le point d'intersection de la courbe avec l'axe horizontal à 5.3. En actionnant **ROOT** du menu **MATH** de **GRAPH** et en donnant une amorce près du point d'intersection, on obtient x = 5.3015890427 ce qui correspond à une probabilité de 0.46984109573.

e) On peut également se servir de la fonction **POLY** (pour polynôme). Cette fonction trouve toutes les racines d'un polynôme; il suffit de fournir le degré du polynôme ainsi que ses coefficients. Dans le cas actuel, on aura:

POLY
order = 2
a2 = $\pi - 4$ (ou –.8584073464102)
a1 = 80
a0 = –400

Ensuite, avec la touche **SOLVE**, on obtiendra:

x1 = 87.8942582838 et x2 = 5.30158904269

Bien sûr, on ne retient que la seconde racine et la probabilité cherchée s'établit à 0.469841095731, résultat cohérent avec tous les autres.

f) On peut aussi réaliser une simulation Monte Carlo afin d'approcher empiriquement la probabilité en question. C'est un court programme qui effectuera le travail. Le programme se lit comme suit:

```
PROGRAM: CORDE
: Disp "NOMBRE D'ESSAIS ="
: Input E
: 0 → S
: For (T, 1, E, 1)
        : 10 * rand → x
        : S + (((π – 4) x² + 80x – 400) > 0) → S
: End
: Disp "FRÉQUENCE RELATIVE="
: Disp S / E
```

Une fois le programme lancé pour 500 essais, l'affichage indique 0.46 après 50 secondes. En 10 000 essais, 0.4678 a été obtenu en moins de 40 minutes!

g) Nous terminons cette activité avec la solution théorique du problème. La résolution de l'équation

$$(\pi - 4)\, x^2 + 80x - 400 = 0$$

donne

$$x = \frac{-80 \pm \sqrt{1600\pi}}{2(\pi - 4)}$$

Pour déterminer la probabilité cherchée, on doit se servir de la plus petite de ces deux racines. On obtient alors

$$P(A) = \frac{10 - \dfrac{-80 + \sqrt{1600\pi}}{2(\pi - 4)}}{10} = \frac{\pi - 2\sqrt{\pi}}{\pi - 4}$$

Comme vous vous en doutiez, cela donne un résultat indépendant de la longueur de la corde ... et qui est égal à 0.469841095732!

Exercice

1.

Répétez la même activité en remplaçant le carré et le cercle par:

a) un carré et un triangle équilatéral,

b) un cercle et un triangle équilatéral.

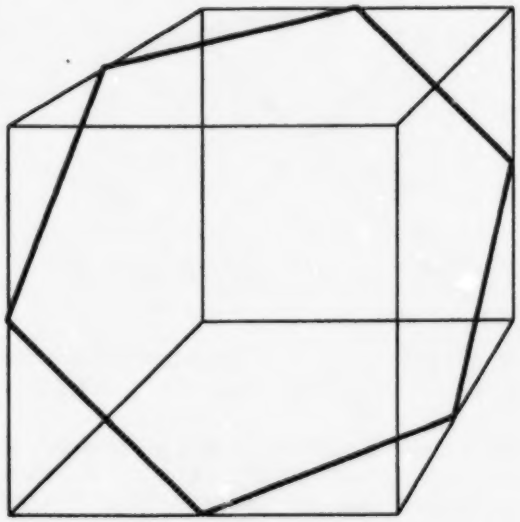
3.10 L'hexacube

Préambule

L'activité qui suit en est une de résolution de problème. Elle peut être proposée aux étudiants du cours Math 105. L'étudiant doit connaître le produit scalaire, le produit vectoriel ainsi que le concept de plan dans l'espace. Nous proposons une solution faisant usage du calculateur. Elle montre comment l'étudiant peut se concentrer sur les concepts importants et sur sa démarche de résolution sans être préoccupé par les calculs.

Activité

Considérons un cube et relions les milieux de certaines arêtes tel qu'indiqué sur la figure suivante.



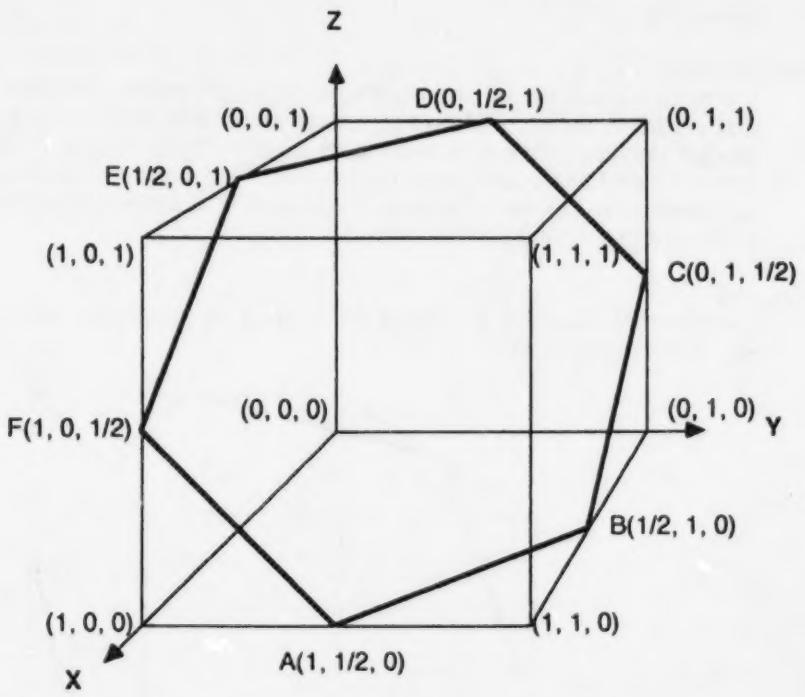
Démontrez que la figure obtenue est un hexagone régulier.

Une solution

La conclusion à démontrer comporte trois clauses:

- La figure est plane.
- Les six côtés ont même longueur.
- Les six angles au sommet ont même mesure.

Pour mathématiser cette situation, plaçons le cube dans un repère orthonormé de l'espace. Sans perte de généralité, on peut considérer que la longueur de chacune des arêtes du cube est de 1. Il est facile de numériser les sommets du cube ainsi que les sommets du présumé hexagone.



Dans les variables A, B, ... , F insérons les coordonnées des points A, B, ... , F comme suit: [1, 1/2, 0] **STO** > A, [1/2, 1, 0] **STO** > B, ... , [1, 0, 1/2] **STO** > F.

La première chose à montrer est que les points A, B, ... , F sont coplanaires. Les points A, B et C n'étant pas alignés, ils déterminent un plan $\pi(A, B, C)$. Il suffira donc de montrer que les points D, E et F appartiennent à ce plan. Nous utiliserons le critère d'appartenance suivant:

$$P \in \pi(A, B, C) \quad \Leftrightarrow \quad (P - A) \perp (B - A) \times (C - A)$$
$$\Leftrightarrow \quad (P - A) \cdot ((B - A) \times (C - A)) = 0$$

Voyons si D vérifie la condition. On demande donc au TI-85 de calculer

dot (D - A, cross(B - A , C - A))

et le résultat tel qu'espéré est 0. On reprend le calcul avec E et F en s'aidant de **ENTRY** et ces calculs donnent 0 comme résultat. Ainsi, les points A, B, ... , F sont coplanaires.

Voyons maintenant les deux autres clauses de la conclusion à démontrer. Attaquons-nous d'abord à montrer que les six côtés ont même longueur. Pour cela, nous allons comparer les normes des vecteurs BC, CD, DE, EF et FA à celle du vecteur AB. Par exemple, pour ce qui est du vecteur BC, on demande au TI-85 de nous donner la valeur de vérité de

$$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|$$

En langage de TI-85, cela s'écrit:

norm (C - B) = = norm (B - A)

Le calculateur nous répond 1, ce qui signifie que l'égalité est vraie. On reprend la dernière procédure avec les vecteurs CD, DE, EF et FA. L'opération est rapide si on utilise ENTRY. Les égalités sont toutes confirmées.

Enfin, passons à la troisième clause de notre conclusion: tous les angles au sommet ont même mesure. Comment calcule-t-on l'angle en un sommet? En ramenant le calcul à celui de l'angle de deux vecteurs: l'angle θ de deux vecteurs v_1 et v_2 vérifie l'égalité suivante:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}|\,|\overrightarrow{v_2}|}\right)$$

Définissons l'équation suivante au clavier du calculateur:

angle = $\cos^{-1}$ (dot (v1, v2) / (norm (v1) * norm (v2)))

Calculons l'angle au sommet A:

B - A STORE > v1 : F - A STORE > v2 : angle

En mode "degrés", la réponse que nous fournit le calculateur lorsque "angle" est demandé est 120°. Il suffit de répéter le calcul pour chaque sommet en reprenant la même séquence de commandes (à l'aide de ENTRY) et en modifiant les données qui ont à être changées. À chaque sommet, l'angle mesure 120°, ce qui termine notre solution.

Exercice

1.

Reprendre l'activité précédente en remplaçant le cube par un tétraèdre régulier.

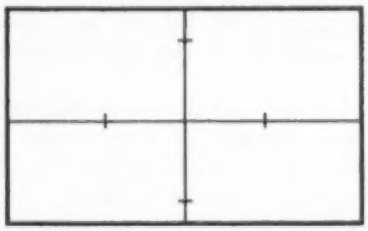
3.11 La puissance qui donne des complexes

Préambule

La présente activité demande à l'étudiant de connaître la définition de nombre complexe sous les formes cartésienne et polaire, les opérations élémentaires sous la forme cartésienne ainsi qu'une certaine familiarité avec la représentation des nombres complexes dans le plan d'Argand.

Activité

Vous allez d'abord explorer le calcul des puissances entières d'un nombre complexe. Commencez avec i. Calculez i, i^2, i^3, ... ,i^8 puis représentez ces résultats dans le plan d'Argand ci-bas. Que remarquez-vous?



Continuons en remplaçant i par 1 + i et essayons de dégager un "pattern" pour $(1 + i)^n$ où n est un nombre naturel quelconque. Dans un premier temps, calculez "manuellement" les puissances $(1 + i)^2$, $(1 + i)^3$, $(1 + i)^4$, $(1 + i)^5$. Vous allez ensuite vérifier la justesse de ces calculs en utilisant le calculateur. La procédure peut être la suivante:

$$(1, 1) \rightarrow C$$
$$(1, 1) * C \rightarrow C$$

ce qui nous donne $(1 + i)^2$. En répétant la dernière commande (avec ENTRY suivi de ENTER), vous obtiendrez $(1 + i)^3$ et ainsi de suite. À l'aide de cette procédure, calculez les 5 premières puissances naturelles de 1 + i et comparez les résultats avec vos calculs "papier-crayon". Un "pattern" est-il en vue? Essayez d'en dégager un en manipulant des expressions générales du type $(a + bi)^n$ où a et b sont des nombres réels et n, un naturel. À cette fin, remplissez les deux dernières lignes du tableau suivant.

Puissance (n)	$Re(a + bi)^n$	$Im(a + bi)^n$
1	a	b
2	$a^2 - b^2$	2ab
3	.....	.....
4	.....	.....

Vous avez sûrement constaté que les expressions deviennent de plus en plus élaborées et que le "pattern", si "pattern" il y a, n'est pas évident à découvrir sous cette forme.

Par ailleurs, dans le cas des puissances de i, il semblait y avoir un aspect géométrique au "pattern" qu'il faudrait retrouver. Pour cela, tournons-nous vers la forme polaire.

Il est possible d'obtenir directement les différentes puissances de 1 + i en faisant (1, 1)^2, (1, 1)^3, ... À chaque occasion, on peut transposer le résultat sous forme polaire au moyen de "Ans>Pol" (>Pol fait partie du menu CPLX). Regroupez ces résultats dans le tableau suivant en remplissant les deux dernières colonnes après avoir choisi le mode Degree.

Puissance (n)	$(a + bi)^n$ forme cartésienne	$(a + bi)^n$ forme polaire
1	.....	.....
2	.....	.....
3	.....	.....
4	.....	.....
5	.....	.....

Qu'observez-vous? Ces observations sont-elles cohérentes avec le comportement de i^n observé au début? Quelle conjecture pouvez-vous émettre?

Vous allez maintenant illustrer graphiquement le calcul des différentes puissances de 1 + i dans le plan d'Argand. Pour cela, vous allez vous servir de la conjecture que vous avez émise (!). Fort probablement, sous forme polaire, qu'elle se lirait comme suit:

Si $r \angle \theta$ est la forme polaire d'un nombre complexe, alors $(r \angle \theta)^n = r^n \angle n\theta$.

Sous forme trigonométrique, elle s'énoncerait plutôt comme suit:

$$(|z| (\cos\theta + i \sin\theta))^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \text{ où } n \in N$$

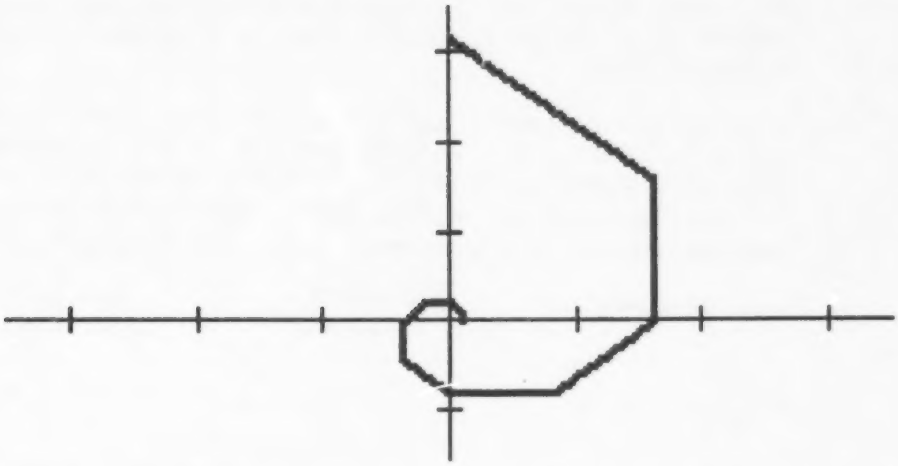
Utilisons cette conjecture. Comme $1 + i = \sqrt{2} \angle 45°$, il est possible d'illustrer les puissances naturelles de 1 + i au moyen des équations paramétriques suivantes.

$$x1t = \text{real}((\sqrt{2})^t \angle 45t)$$
$$y1t = \text{imag}((\sqrt{2})^t \angle 45t)$$

avec un écran d'affichage (RANGE) déterminé par:

tMin = 0	xMin = –35	yMin = –15
tMax = 10	xMax = 35	yMax = 35
tStep = 1	xScl = 10	yScl = 10

Faites tracer la courbe paramétrique.



L'allure de la courbe était-elle prévisible? Ensuite, à l'aide de **TRACE**, vérifiez que les résultats des calculs de $(1 + i)^n$ sous forme cartésienne du premier tableau correspondent à des points situés sur cette courbe. Ainsi, on vient de vérifier que pour n, un entier naturel entre 1 et 5, on a:

$$(1 + i)^n = (\sqrt{2} \angle 45°)^n = (\sqrt{2})^n \angle 45n°$$

Cela signifie qu'en définissant

x2t = real ((1, 1)^t)
y2t = imag ((1, 1)^t)

les 2 courbes paramétriques (1 et 2) devraient coïncider pour des valeurs entières de t entre 1 et 5.

Qu'arrive-t-il pour les valeurs entières de t entre 6 et 10? Comme vous l'aurez sûrement remarqué, la coïncidence entre les deux courbes paramétriques est aussi observée pour ces valeurs de t. Vous allez maintenant essayer de prouver que ces deux courbes paramétriques devraient coïncider pour toutes les valeurs entières de t et pour tout nombre complexe z qui viendrait remplacer 1 + i. En d'autres mots, prouvez par induction, que pour tout naturel n:

Si $r \angle \theta$ est la forme polaire d'un nombre complexe alors $(r \angle \theta)^n = r^n \angle n\theta$.

Sous forme trigonométrique, le résultat s'écrirait plutôt:

$$(|z| (\cos \theta + i \sin \theta))^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Ce résultat se nomme "le théorème de De Moivre", du nom d'un célèbre mathématicien français du 18ième siècle.

Maintenant, vous allez aborder la notion de racines de nombres complexes. Cherchez un nombre complexe z qui soit racine carrée de $4 + 4\sqrt{3}\ i$. Par définition, vous cherchez un nombre complexe z tel que:

$$z^2 = 4 + 4\sqrt{3}\ i$$

Ou encore, sous forme polaire en posant $z = r \angle \theta$, vous cherchez r et θ tels que:

$$(r \angle \theta)^2 = 4 + 4\sqrt{3}\ i = 8 \angle 60°$$

Quelle sera la valeur de r? de θ? Par le théorème de DeMoivre, il est clair que $r^2 = 8$ donc $r = \sqrt{8}$. Cela veut dire que le nombre cherché est situé sur un cercle centré à l'origine de rayon égal à $\sqrt{8}$. Les "candidats" situés sur un tel cercle peuvent être exprimés par les équations paramétriques suivantes (où t varie entre 0° et 360°):

$$x1t = \text{real}\ (\sqrt{8} \angle t)$$
$$y1t = \text{imag}\ (\sqrt{8} \angle t)$$

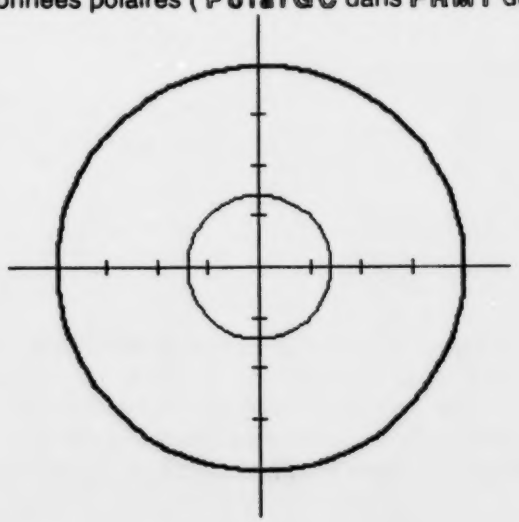
Pour les tester, il suffit de les mettre au carré et de voir s'ils égalent $8 \angle 60°$. Pour produire ces carrés, définissons, en concordance avec le théorème de DeMoivre:

$$x2t = \text{real}\ (8 \angle 2t)$$
$$y2t = \text{imag}\ (8 \angle 2t)$$

avec

tMin = 0	xMin = −10	yMin = −10
tMax = 360	xMax = 10	yMax = 10
tStep = 3	xScl = 2	yScl = 2

Faites tracer ces courbes. Pour un résultat plus satisfaisant, il est bon de demander **ZSQR** dans **ZOOM** et **SImulG** dans **FRMT** de **GRAPH**. Faites afficher les coordonnées polaires (**PolarGC** dans **FRMT** de **GRAPH**).



Qu'observez-vous? Quelles sont les racines carrées de $4 + 4\sqrt{3}\,i$? Vous pourriez les découvrir avec **TRACE**. En employant la même procédure, trouvez les racines cubiques de $4 + 4\sqrt{3}\,i$, puis les racines quatrièmes de $4 + 4\sqrt{3}\,i$. Ensuite, remplissez le tableau suivant avec les résultats obtenus.
(N.B.: $4 + 4\sqrt{3}\,i = 8 \angle 60°$)

Valeur de n	Racines $n^{ièmes}$ de $8 \angle 60°$ (sous forme polaire)
2	.....
	.....
3	.....
	.....
	.....
4	.....
	.....
	.....
	.....

Pouvez-vous émettre une conjecture? Vous allez tester cette conjecture dans le cas des racines $5^{ièmes}$ de $8 \angle 60°$. Il est clair, par le théorème de DeMoivre, que

$$\sqrt[5]{8} \angle 12°$$

est une de ces racines et que, s'il y en a d'autres, elles se situent toutes sur un cercle centré à l'origine dont le rayon égal

$$\sqrt[5]{8} \quad (= 8^{0.2})$$

Vous pouvez illustrer le "chemin" pris par les différentes puissances (entre 1 et 5) de

$$\sqrt[5]{8} \angle 12°$$

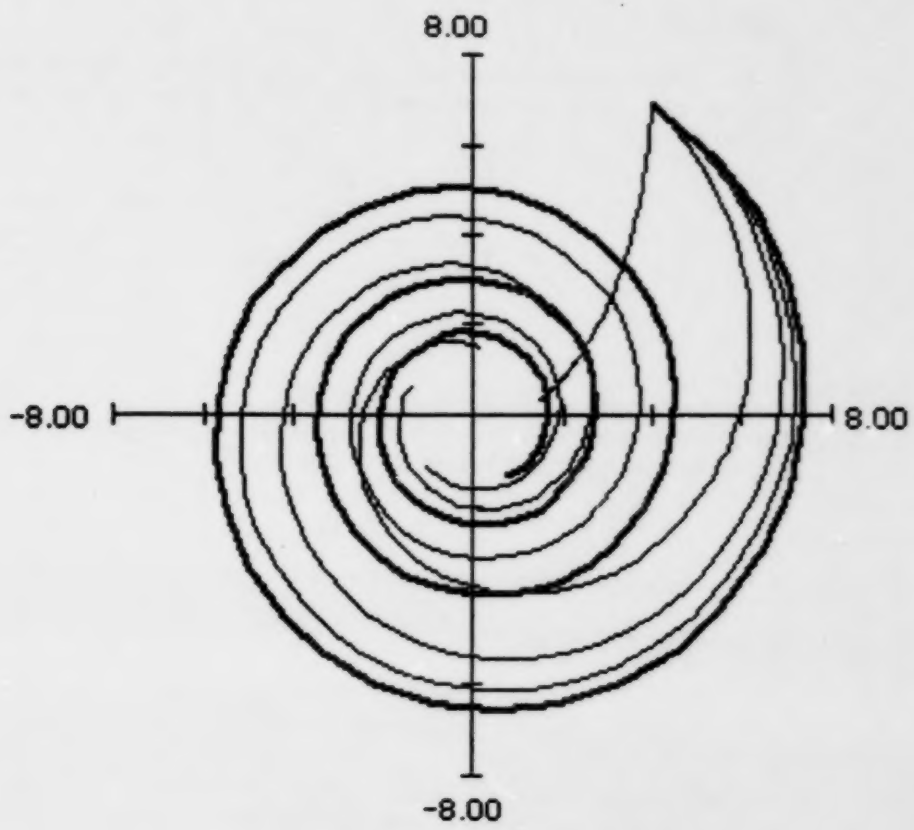
de la façon suivante:

```
x1t = real ((8^0.2)^t ∠ 12t)
y1t = imag ((8^0.2)^t ∠ 12t)
```

avec

tMin = 1	xMin = –10	yMin = –10
tMax = 5	xMax = 10	yMax = 10
tStep = 0.1	xScl = 1	yScl = 1

Le "point d'arrivée" de cette courbe paramétrique est $8 \angle 60°$ ou encore $4+4\sqrt{3}i$ et constitue donc notre cible à atteindre. Pouvez-vous définir 4 autres courbes paramétriques dont le point de départ se situerait sur le cercle de rayon égal à $8^{0.2}$ et dont le point d'arrivée serait notre cible: $8 \angle 60°$? Essayez! Ces courbes tracées séquentiellement (mode **Seq G**) produisent un effet spectaculaire!



Nous pouvons donc énoncer le résultat relatif aux racines $n^{ièmes}$ (n est un entier naturel) d'un nombre complexe z. (N.B.: Ici, la mesure d'angle est donnée en radians.)

Sous forme polaire:

soit $z = r \angle \theta$ où $z \neq 0$, alors les n racines $n^{ièmes}$ de z sont données par:

$$\sqrt[n]{r} \angle \frac{\theta + k2\pi}{n} \text{ où } k = 0, \ldots, n-1$$

Sous forme trigonométrique:

soit $z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$ où $z \neq 0$, alors les n racines $n^{ièmes}$ de z sont données par:

$$\sqrt[n]{|z|} \left(\cos\frac{\theta + k2\pi}{n} + i \sin\frac{\theta + k2\pi}{n}\right) \text{ où } k = 0, \ldots, n-1$$

Exercices

1.

Y a-t-il un résultat général qui exprime la valeur de z^n où n est un entier négatif? C'est ce que vous allez essayer de découvrir. Dans ce but, remplissez le tableau suivant.

n	$(1 + i)^n$ forme cartésienne	$(1 + i)^n$ forme polaire
−1	.....	.....
−2	.....	.....
−3	.....	.....
−4	.....	.....
−5	.....	.....

a) Quelle conjecture pouvez-vous émettre?
b) Y a-t-il un graphique qui pourrait illustrer les puissances négatives de 1 + i.
c) Démontrez pour n, un naturel quelconque:

sous forme trigonométrique:

$$[|z| (\cos\theta + i \sin\theta)]^{-n} = |z|^{-n} (\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)) \text{ où } n \in N.$$

sous forme polaire:

$$(r \angle \theta)^{-n} = r^{-n} \angle -n\theta \text{ où } n \in N.$$

2.

a) Quel est le produit des 2 racines carrées de $4 + 4\sqrt{3}\,i$?
b) Quel est le produit des 3 racines cubiques de $4 + 4\sqrt{3}\,i$?
c) Quel est le produit des 4 racines quatrièmes de $4 + 4\sqrt{3}\,i$?
d) Quel est le produit des 5 racines cinquièmes de $4 + 4\sqrt{3}\,i$?
e) Quelle conjecture pouvez-vous émettre?
f) Essayez de démontrer cette conjecture.

3.

Les courbes que vous avez produites représentant les différentes puissances d'un nombre complexe étaient toutes des spirales. Y a-t-il moyen de produire un cercle? Si oui, donnez un exemple.

4.

À l'aide d'une courbe paramétrique, pouvez-vous produire une figure où
a) les 3 racines cubiques de $4 + 4\sqrt{3}\,i$ sont reliées par des segments de droite?
b) les 4 racines quatrièmes de $4 + 4\sqrt{3}\,i$ sont reliées par des segments de droite?
c) les 5 racines cinquièmes de $4 + 4\sqrt{3}\,i$ sont reliées par des segments de droite?
d) Dans chacun des cas, quelle figure obtenez-vous?

3.12 Binormale, vous avez dit?

Préambule

Lorsque l'étudiant aborde cette activité, il connaît certains faits relatifs à la binomiale et à la normale. Entre autres, il sait que si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale B(N, p) alors

$$Pr(X = k) = C_k^N \, p^k \, (1 - p)^{N-k}$$

Son espérance, E(X), et sa variance, V(X), sont respectivement données par

$$E(X) = N\,p \text{ et } V(X) = N\,p\,(1 - p)$$

De plus, il sait ce que signifie la fonction de densité de probabilité de X ainsi que son rôle dans le calcul d'une probabilité. Par ailleurs, l'étudiant reconnaît la "cloche" caractéristique associée aux distributions normales. Enfin, il possède certaines connaissances sur l'intégrale définie; notamment, son interprétation graphique en termes d'aire d'une surface sous la courbe et il sait utiliser les tables de binomiale.

Activité

Le but de cette activité est de sensibiliser l'étudiant à l'approximation d'une binomiale par une normale quand le nombre d'essais est élevé et de lui faire constater tant sur le plan graphique que sur le plan numérique la qualité de cette approximation lorsque les conditions sont respectées.

a) Vous allez demander au TI-85 de tracer l'histogramme d'une binomiale B(N, p) pour plusieurs valeurs des paramètres N et p. À cette fin, en mode **GRAPH**, définissez:

$$y1 = (N \text{ nCr int}(x + .5)) * p\text{^int}(x + .5) * (1 - p)\text{^}(N - \text{int}(x + .5))$$

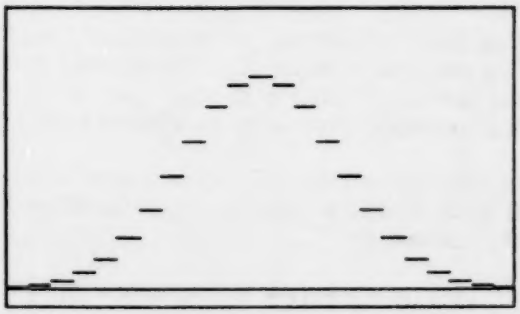
Avec un peu de perspicacité, vous reconnaîtrez que le membre de droite de cette équation correspond, à quelques détails près, à l'expression:

$$C_x^N \, p^x \, (1 - p)^{N-x}$$

Puis, observez les histogrammes de la binomiale pour les valeurs de N et p apparaissant dans la tableau suivant. Dans chaque cas, nous vous suggérons des intervalles horizontal et vertical définissant la fenêtre d'affichage. Vous entrez ces valeurs en actionnant **RANGE** du menu **GRAPH**. Les valeurs de N et p doivent être définies à partir de l'écran "**HOME**". Les graphiques sont plus représentatifs si le format d'affichage est le mode "point" (**DrawDot**).

N	p	Intervalle horizontal	Intervalle vertical
5	0.5	[–1 ; 6]	[–0.1 ; 0.4]
20	0.5	[–1 ; 21]	[–0.05 ; 0.2]
20	0.5	[3 ; 17]	[–0.05 ; 0.2]
50	0.5	[–1 ; 51]	[–0.03 ; 0.12]
50	0.5	[14 ; 36]	[–0.03 ; 0.12]
100	0.5	[–1 ; 101]	[–0.02 ; 0.08]
100	0.5	[35 ; 65]	[–0.02 ; 0.08]
5	0.25	[–1 ; 6]	[–0.15 ; 0.5]
20	0.25	[–1 ; 21]	[–0.05 ; 0.25]
20	0.25	[–1 ; 11]	[–0.05 ; 0.25]
50	0.25	[–1 ; 51]	[–0.03 ; 0.15]
50	0.25	[3 ; 22]	[–0.03 ; 0.15]
100	0.25	[–1 ; 101]	[–0.025 ; 0.1]
100	0.25	[12 ; 38]	[–0.025 ; 0.1]

Lorsque N vaut 50 et p vaut 0.5, le graphique apparaissant à l'écran d'affichage du calculateur a l'allure suivante:



Note

Si vous parcourez les courbes en mode **TRACE**, vous allez retrouver en ordonnée les valeurs que donnent les tables de binomiale. Ainsi, lorsque N vaut 5 et p vaut 0.5, le point de la courbe dont l'abscisse est entre 1.5 et 2.5 affiche une ordonnée de 0.3125; c'est la probabilité d'avoir 2 succès en 5 essais indépendants lorsque la probabilité d'un succès est 0.5. C'est aussi la valeur que donne une table de binomiale B(5, 0.5) à la ligne commençant par 2 succès.

b) Pour mieux percevoir la qualité de l'approximation de la binomiale par une normale lorsque N grandit, vous allez superposer à l'histogramme de la binomiale la courbe de la normale dont la moyenne et la variance coïncident avec celles de la binomiale. Pour vous faciliter la tâche, entrez les équations suivantes.

$$\mu = N * p$$
$$\sigma = \sqrt{(N * p * (1 - p))}$$

Les lettres grecques sont accessibles par **CHAR GREEK**.

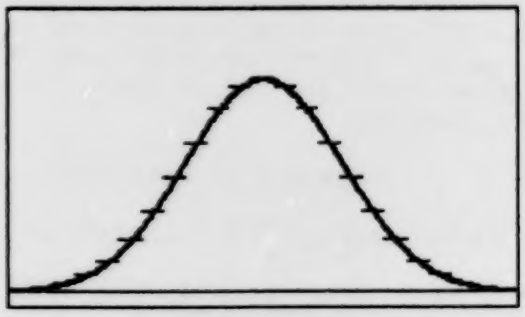
Puis, entrez la fonction de densité de probabilité de la normale dont la moyenne est μ et la variance est σ^2:

$$y2 = (1 / (\sigma * \sqrt{(2\pi)}) * e\text{^}(-0.5((x - \mu) / \sigma)^2).$$

Derrière ce symbolisme, on peut reconnaître la fonction

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Maintenant, pour chacun des cas de la partie ε), observez les graphiques de y1 et y2. Par exemple, quand N vaut 50 et p vaut 0.5, l'écran du calculateur nous montre les graphiques suivants:



Quand N croît, les graphiques de y1 et y2 deviennent de plus en plus ressemblants.

Un des intérêts d'approcher une binomiale par une normale réside dans le fait que la tâche de calculer des probabilités liées à la binomiale est facilitée par l'usage de la normale. On approche alors l'aire de la surface sous la fonction de densité de la binomiale par celle de la surface sous la courbe normale. Les statisticiens nous apprennent que plus N est grand et plus p est voisin de 0.5, meilleure est l'approximation. L'approximation est alors satisfaisante si

$$N > 5 \text{ et } \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sqrt{\frac{p}{1-p}} - \sqrt{\frac{1-p}{p}} \right) \right| < 0.3$$

Voyons quelques cas provenant de situations de problèmes où l'on cherche à calculer des probabilités liées à des binomiales.

c) On lance 25 fois une pièce de monnaie non truquée. Quelle est la probabilité d'obtenir 16 faces?

Solution
Soit X, la variable aléatoire qui donne le nombre de faces obtenues lors de 25 lancers. Alors X ~ B(25, 0.5). La probabilité cherchée est donnée par

$$Pr(X = 16) = C_{16}^{25} (0.5)^{16} (0.5)^{9} = ...$$

Voyez ce que donne la table de la binomiale ..... et ce que donne le TI-85 ....., quand en mode **TRACE**, on détermine la valeur de l'ordonnée pour x égal à 16 (ou du moins pour x entre 15.5 et 16.5) le long de la courbe y1.

Vérifiez que les conditions pour approcher la binomiale par une normale sont vérifiées. Ainsi, pour estimer la probabilité cherchée, vous pouvez calculer l'aire de la surface sous la courbe normale (y2) entre 15.5 et 16.5. Il s'agit bien sûr d'une intégrale définie que peut calculer le TI-85. Cette commande (**fnInt**) apparaît au menu **CALC**.

fnInt (y2, x, 15.5, 16.5) =.....

Que pensez-vous de la qualité de l'approximation?

d) Dans le même contexte que celui de **c)**, quelle est la probabilité d'obtenir entre 10 et 21 faces (10 et 21 inclus)?

Solution
D'abord faites-le avec la table de binomiale.

$$Pr(10 \leq X \leq 21) = Pr(X = 10) + Pr(X = 11) + ... + Pr(X = 21)$$

$$Pr(10 \leq X \leq 21) = ...$$

Maintenant, que nous donne le TI-85 quand on intègre y1 de 9.5 à 21.5? (Soyez patient, ce calcul peut être assez long!)

fnInt (y1, x, 9.5, 21.5) = ...

Enfin, puisque les conditions sont remplies (à vous de vous en convaincre), on peut approcher la binomiale par une normale et la probabilité cherchée peut être approchée par l'aire de la surface sous la courbe normale entre 9.5 et 21.5?

fnInt (y2, x, 9.5, 21.5) = ...

Que pensez-vous de la qualité de l'approximation?

e) Il a été établi empiriquement que la probabilité qu'une punaise retombe la pointe en haut quand on la lance est de 0.32. On laisse tomber un paquet de 50 punaises; quelle est la probabilité que moins de 20 retombent la pointe en haut?

Solution
Soit X, la variable aléatoire qui donne le nombre de punaises qui retombent la tête en haut quand on en laisse tomber 50. Cette variable aléatoire suit une loi binomiale. Plus précisément,

$$X \sim B(50, 0.32)$$

La probabilité cherchée est Pr(X < 20). Vérifiez que les conditions requises pour approcher la binomiale par une normale sont satisfaites. Rafraichissez les valeurs de N et p puis, calculez l'aire de la surface sous la courbe normale approchant la binomiale.

fnInt (y2, x, –0.5, 19.5) = ...

Calculez la probabilité exacte comme le donnerait une table de binomiale.

fnInt (y1, x, –0.5, 19.5) = ...

Que pensez-vous de la première valeur comme approximation de la seconde? Comme on peut calculer la valeur exacte de la probabilité avec le TI-85, pourquoi y a-t-il quand même intérêt à utiliser une approximation de la binomiale par une normale?

f) Pour terminer, voyons un cas où les conditions pour approcher une binomiale par une normale ne sont pas satisfaites. Précisons que cela se produit lorsque N est petit et que p est près de 0 ou de 1. Considérons une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale. Précisément,

$$X \sim B(5, 0.9)$$

Quelle est la probabilité que X égale 4?

Solution
Convainquez-vous que les conditions pour approcher une binomiale par une normale ne sont pas satisfaites et rafraichissez les valeurs de N et p.

Calculez Pr(X = 4) avec une table de binomiale;

Pr(X = 4) =.....

Calculez l'intégrale de y1 entre 3.5 et 4.5;

fnInt (y1, x, 3.5, 4.5) = ...

Calculez l'intégrale de y2 entre 3.5 et 4.5;

fnInt (y2, x, 3.5, 4.5) = ...

Les deux premiers résultats devraient coïncider. Que pensez-vous du dernier résultat comme valeur approchée de Pr(X = 4)?

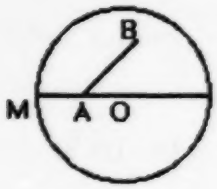
3.13 Éclipse de cercle: une autre excursion en probabilités

Préambule

La présente activité peut se dérouler à l'intérieur du cours Math 203 ou Math 303. Elle demande la connaissance de la notion d'intégrale définie et la familiarité avec la notion de probabilité dans un espace échantillonnal à trois dimensions.

Activité

Dans le graphique ci-bas est illustré un cercle de rayon unitaire de centre O. On choisit au hasard un point sur le segment de droite MO, nommons ce point A. Ensuite, on choisit aléatoirement un point B à l'intérieur du cercle. Quelle est la probabilité que la longueur du segment de droite AB soit inférieure à 1?



Faites un programme pour simuler cette expérience aléatoire 10 000 fois et pour calculer la fréquence relative des "succès" obtenue. Ce programme peut ressembler à ce qui suit:

```
: PROGRAM: ECLIPSES
: Disp "NOMBRE D'ESSAIS="
: Input N
: 0 → S
: For (T,1,N,1)
    : (2* rand–1) → A
    : Repeat C²+ D²< 1
    : (2* rand –1) → C
    : (2* rand –1) → D
: End
: S+ (( √((A–C)² +D²))<1) → S
: End
: Disp "FRÉQUENCE RELATIVE =", S/N
```

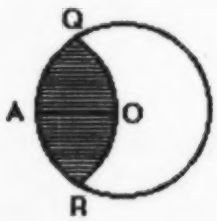
Nous avons fait rouler ce programme pour 10 000 essais et nous avons obtenu une fréquence relative de 0.6929.

En fonction du choix du point A, la région des cas favorables varie énormément. Dans les graphiques suivants, nous avons fait varier la valeur de l'abscisse du point A (appelons-la a) entre –1 et 0 avec des sauts de 0.2. Dans chacun des cas, la région des cas favorables est identifiée par la région ombrée.

a= −1 a= −0.8 a= −0.6

a= −0.4 a= −0.2 a= 0

Regardons de plus près le premier de ces cas particulers.



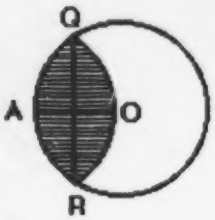
La probabilité cherchée se calcule au moyen d'un rapport d'aires. L'aire totale est celle du cercle unitaire et est donc égale à π. La région des cas favorables est représentée par la région hachurée. Pour l'obtenir, il suffit de tracer un cercle de rayon unitaire centré en (−1,0) et d'hachurer l'intersection de ce cercle avec le cercle original. Ensuite, pour touver l'aire de la région hachurée, il faudrait déterminer les coordonnées des points Q et R; ce sont les points d'intersection des cercles de rayon unitaire centrés respectivement en O (0,0) et A (−1,0). Puisque ces cercles répondent aux équations

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ et } (x+1)^2 + y^2 = 1,$$

il faut alors trouver les solutions à l'équation:

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - (x+1)^2}$$

Un simple calcul papier-crayon nous donne $x = \pm 0.5$ où nous retenons uniquement la solution négative. Ainsi, le point Q est $(-0.5, \sqrt{0.75})$ et le point R est $(-0.5, -\sqrt{0.75})$. Comme l'indique le graphique suivant, la région hachurée est formée de 4 régions identiques.



On peut alors évaluer l'aire totale de la région hachurée par:

$$4\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Au moyen du calculateur, la probabilité cherchée dans ce cas particulier s'obtient par: (4* fn Int (√(1- x²), x, –1,–0,5))/π et donne 0.391002718933.

De manière générale, si le point A est (a,0), montrez que la probabilité dans ce cas est donnée par:

$$\frac{4\int_{-1}^{\frac{a}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx}{\pi}$$

Dès lors, remplissez le tableau suivant au moyen du **SOLVER**.

a	$\left(4\int_{-1}^{a/2}\sqrt{1-x^2}\,dx\right)/\pi$
–1	.....
–0.8	.....
–0.6	.....
–0.4	.....
–0.2	.....
0	.....

Quelle est la moyenne arithmétique des six nombres de la colonne de droite? Est-elle proche de la fréquence relative obtenue lors de la simulation du début de l'activité?

Pour des valeurs de a entre –1 et 0, prouvez de manière formelle que:

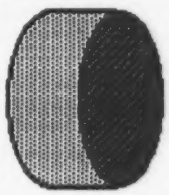
$$\frac{4\int_{-1}^{a/2}\sqrt{1-x^2}\,dx}{\pi} = \frac{2\arcsin\left(\frac{a}{2}\right)+a\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}+\pi}{\pi}$$

Ensuite, au moyen du calculateur, vérifiez que l'expression

$$\frac{2\arcsin\left(\frac{a}{2}\right)+a\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}+\pi}{\pi}$$

génère tous les nombres de la colonne de droite du tableau précédent en remplaçant successivement a par –1,–0.8, –0.6, –0.4, –0.2 et 0.

Maintenant, on peut visualiser l'espace échantillonnal comme étant constitué d'un cylindre où chaque tranche infinitésimale est constituée d'une "photo" du cercle pour une valeur précise de a.



–1 0

La probabilité cherchée correspond donc au rapport des volumes suivant:

$$\frac{\int_{-1}^{0}\left(2\arcsin\left(\frac{a}{2}\right)+a\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}+\pi\right)da}{\pi}$$

Au moyen du calculateur, l'opération

$$\text{fnInt}\,(2\arcsin(a/2)+(a\sqrt{(1-(a^2/4))})+\pi, a, -1, 0)/\pi$$

donne 0.688499686691.

Prouvez de manière formelle ce dernier résultat. Finalement, remarquez que le calcul théorique (0.688499686691) est relativement près du calcul empirique (0.6929) obtenu lors de notre simulation et que

$$0.688499686691 \text{ a été obtenu de } \int_{-1}^{0}\left(4\int_{-1}^{a/2}\sqrt{1-x^2}\,dx\right)da$$

3.14 Petit glossaire du TI-85

ALPHA
La pression de cette touche met le calculateur en mode alphabétique; ainsi, lorsqu'une touche est enfoncée une lettre s'affiche.

AxesOff
Instruction qui permet de ne pas afficher les axes lors de tracés de courbes à l'écran.

arc
Fonction qui retourne la longueur d'arc entre deux points d'une courbe associée à une fonction.

BOX
Permet de dessiner un rectangle à l'écran en déplaçant le curseur et d'utiliser ce rectangle comme prochaine fenêtre d'affichage.

CALC (pour calculus)
Menu donnant accès à différentes opérations du calcul différentiel et intégral: dérivée, intégrale définie, longueur d'arc, ...

CHAR (pour character)
Menu permettant l'utilisation de symboles spéciaux (accents, symbole de dollar, lettres grecques, ...) pour nommer des variables ou pour afficher des textes.

Disp (pour display)
Instruction servant à afficher du texte ou le contenu d'une variable à l'écran **HOME**.

dot (pour dot product)
Fonction qui calcule le produit scalaire de deux vecteurs.

DRAW
Sous-menu du menu **GRAPH** dont les items sont des opérations où des instructions de nature graphique: dessiner une ligne, un cercle, une tangente à une courbe, effacer un point, ombrer une région, ...

DrawDot
Instruction qui permet de n'afficher que les points calculés sans les relier par des segments de droite lors des tracés de courbes.

ENTER
Touche qui amorce une action lorsqu'enfoncée: évaluation d'une expression, lancement d'un programme, opération d'agrandissement, de réduction, ...

ENTRY

Rappelle à l'écran **HOME** la(les) dernière(s) expression(s) évaluée(s) ou la(les) dernière(s) instruction(s) exécutée(s).

fnInt

Calcule une intégrale définie. La fonction, la variable d'intégration ainsi que les bornes d'intégration doivent être spécifiées.

FORMT (pour format)

Détermine comment les graphiques des fonctions seront affichés: présence ou non des axes, type de coordonnées à afficher, points calculés reliés par des segments de droite ou non, ...

GRAPH

Menu donnant accès à des items de nature graphique dans le tracé des courbes: définition des fonctions à tracer, des limites de l'écran d'affichage, opérations d'agrandissement, ...

GREEK

Menu permettant l'utilisation des symboles grecs les plus couramment utilisés pour la définition de variables ou l'affichage de textes.

HOME

L'écran **HOME** constitue le principal écran du TI-85. Il permet d'entrer des expressions à évaluer, des instructions à exécuter et d'en visualiser les résultats.

Input

Instruction que l'on place dans un programme demandant à l'utilisateur d'entrer une valeur qui sera placée dans une variable spécifiée.

Int

Fonction qui retourne le plus grand entier inférieur à l'argument utilisé.

LINE

Item du sous-menu **DRAW** de **GRAPH** permettant de dessiner à l'écran un segment de droite spécifié par ses extrémités.

MODE

C'est le **MODE** qui contrôle la façon dont les nombres et les courbes seront affichés: nombre de décimales, degré ou radian, nombres complexes sous forme cartésienne ou sous forme polaire, tracé de courbes en mode cartésien, polaire ou paramétrique, ...

MATH
Sous-menu du menu **GRAPH** donnant accès à des opérations mathématiques tout en demeurant dans l'environnement graphique: calcul de racines, de dérivées, d'intégrales définies, de points d'inflexion, ...

norm
Calcule le module d'un vecteur ou d'un nombre complexe.

nCr
Calcule le nombre de combinaisons de R objets pris parmi N. La syntaxe exacte est la suivante: N **nCr** R.

POLY (pour polynôme)
Donne accès à l'algorithme de recherche des racines d'un polynôme. Il suffit de spécifier le degré ainsi que les coefficients du polynôme à résoudre.

RANGE
Spécifie les intervalles horizontal et vertical qui définissent la fenêtre d'affichage des courbes.

ROOT
Opération du sous-menu **MATH** de **GRAPH** qui calcule une racine. Il suffit de s'approcher de la racine en déplaçant le curseur, d'appuyer sur **ENTER** et la racine s'affiche. On demeure dans l'environnement **GRAPH**.

rand (pour random)
Retourne un nombre aléatoire plus grand que 0 et plus petit que 1.

SimulG (pour simultané)
Instruction permettant de dessiner simultanément les graphiques de plusieurs fonctions plutôt que de compléter le dessin d'une fonction avant de passer à la suivante.

SOLVER
Donne accès à l'algorithme de résolution d'équation. Il suffit de définir l'équation, les valeurs de toutes les variables sauf une et le **SOLVER** calculera la valeur de la variable inconnue.

STO→ (pour store)
Instruction qui place une valeur dans une variable.

TanLn (pour tangent line)
Instruction du sous-menu **DRAW** de **GRAPH** qui permet de tracer la tangente à une courbe en un point dont l'abscisse est spécifiée.

TEST
Menu dont les items permettent d'établir la valeur de vérité (vrai: 1, faux: 0) d'expressions comportant les relations >, <, ≠, ...

tMin
Variable système contenant la plus petite valeur du paramètre t lors du traçage de courbes paramétriques.

tMax
Variable système contenant la plus grande valeur du paramètre t lors du traçage de courbes paramétriques.

TRACE
Permet de déplacer le curseur de point en point le long d'une courbe dessinée à l'écran tout en affichant les coordonnées du point visité.

tStep
Variable système contenant l'incrément entre deux valeurs successives du paramètre t lors du traçage de courbes paramétriques.

xFact (pour factor)
Variable système contenant le facteur d'agrandissement (réduction) horizontal lors d'une opération **ZIN (ZOUT)**.

xMin
Variable système contenant la borne de gauche de l'écran d'affichage.

xMax
Variable système contenant la borne de droite de l'écran d'affichage.

xScl (pour scale)
Variable système définissant l'espacement entre deux "marques" consécutives de l'échelle de l'axe horizontal.

yFact (pour factor)
Variable système contenant le facteur d'agrandissement (réduction) vertical lors d'une opération **ZIN (ZOUT)**.

yMin
Variable système contenant la limite inférieure de l'écran d'affichage.

yMax
Variable système contenant la limite supérieure de l'écran d'affichage.

yScl (pour scale)
Variable système définissant l'espacement entre deux "marques" consécutives de l'échelle de l'axe vertical.

ZDECM (pour zoom décimal)
Définit une fenêtre d'affichage telle que la distance entre les centres de deux pixels consécutifs est 0.1. L'intervalle horizontal est [–6.3, 6.3] et l'intervalle vertical est plutôt [–3.1, 3.1].

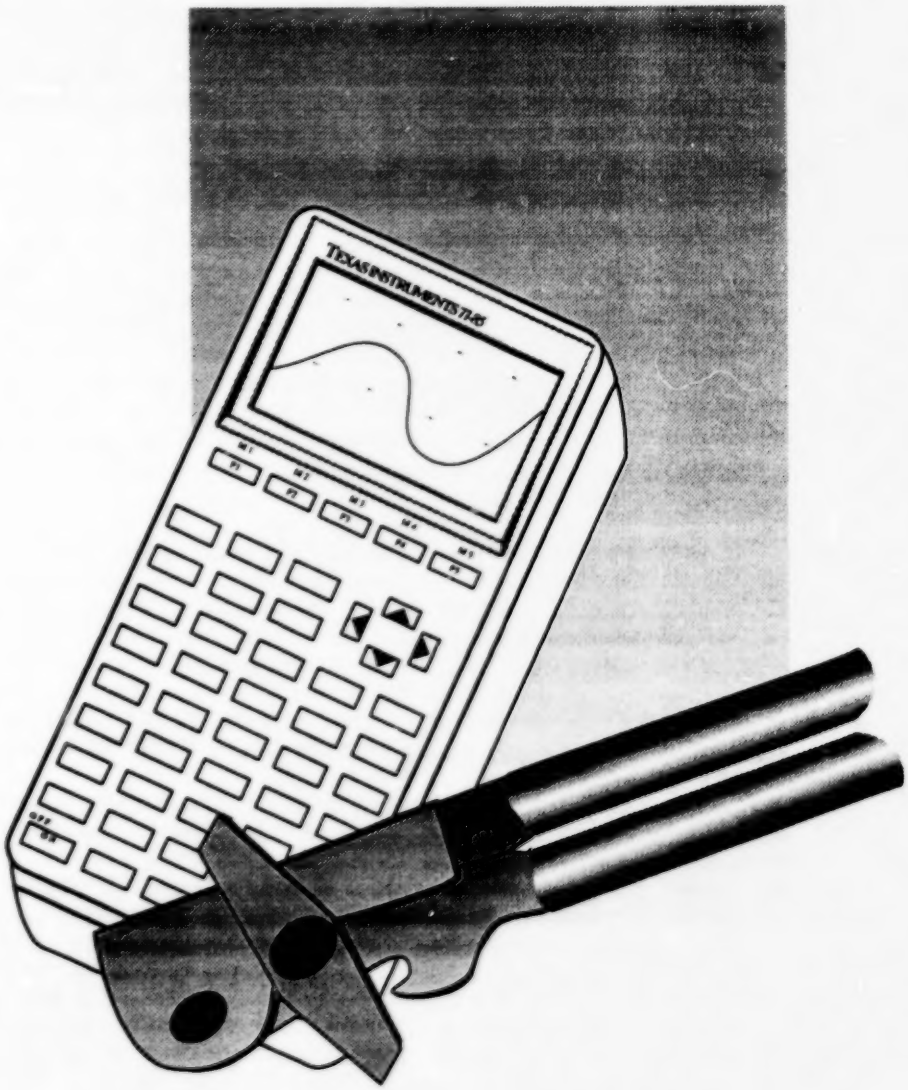
ZIN (pour zoom in)
Opération qui effectue un agrandissement du graphique autour du point où se situe le curseur en utilisant les facteurs d'agrandissement horizontal (**xFact**) et vertical (**yFact**) définis à ce moment.

ZOUT (pour zoom out)
Opération qui effectue une réduction du graphique autour du point où se situe le curseur en utilisant les facteurs d'agrandissement horizontal (**xFact**) et vertical (**yFact**) définis à ce moment.

ZSTD (pour zoom standard)
Nous ramène à la fenêtre d'affichage par défaut du TI-85. L'intervalle horizontal va de –10 à 10 tout comme l'intervalle vertical.

ZOOM
Menu qui donne accès aux différentes opérations de réduction et d'agrandissement et qui permettent de modifier les paramètres de la fenêtre d'affichage.

Formation des professeurs



C h a p i t r e 4

4. FORMATION DES PROFESSEURS

4.1 Besoins justifiant la mise sur pied du programme de formation

Il y a un an, dans l'élaboration des besoins justifiant le premier volet du PROJET AROMATH, nous affirmions:

> ... nous avons un retard à combler quant à l'utilisation des technologies dans l'enseignement des mathématiques à l'ordre collégial. Ce retard est d'autant plus inquiétant qu'il touche nos futurs scientifiques, principaux utilisateurs des mathématiques. (25)

Aujourd'hui encore, ce retard persiste et l'inquiétude grandit. Par ailleurs, le nouveau programme en Sciences de la nature doit s'implanter chez nous à l'automne 1994. Le projet-pilote d'implantation de cette réforme auquel participe notre Collège a permis l'élaboration d'une liste d'objectifs de programme que les futurs étudiants en Sciences de la nature devront atteindre au terme de leurs études collégiales. Chaque discipline du programme s'est appropriée, à sa façon, ces objectifs. Pour nous en mathématiques, soulignons entre autres objectifs, l'intégration des connaissances, la compréhension profonde des concepts fondamentaux, le développement de compétences en résolution de problèmes, l'habileté à relier, aussi souvent que possible, les aspects numérique, symbolique et graphique qui se présentent dans une démarche mathématique.

C'est à l'intérieur de ce contexte que le PROJET AROMATH s'inscrit. Le premier volet (Hiver 94) du projet a confirmé l'énorme potentiel de la technologie dans l'enseignement des mathématiques ainsi que l'adéquation de son utilisation aux objectifs du programme et à ceux de notre discipline. En outre, ce premier volet a mené au choix d'un outil technologique puissant et peu coûteux, le calculateur graphique TI-85, pouvant servir autant à l'apprentissage des concepts mathématiques qu'à leur application. Sous réserve de l'approbation du département, son implantation est prévue au semestre Automne 95.

Il y a donc un réel et pressant besoin d'actualisation de notre enseignement des mathématiques en regard des récents développements technologiques. Les membres du département doivent développer une vision réaliste du rôle de la technologie en mathématiques et dans son enseignement à l'ordre collégial. Ils doivent être sensibilisés à l'influence de la technologie sur la pédagogie, sur les contenus de nos cours, sur les modes d'évaluation, sur l'attitude et les processus d'apprentissage de nos étudiants. Ils doivent également être prêts à affronter les difficultés qu'entraînera l'introduction de la technologie dans leurs pratiques pédagogiques. En outre, ils doivent bien comprendre la philosophie d'utilisation de la technologie informatique afin d'identifier les objectifs du programme et de la discipline dont l'atteinte devient facilitée. De plus, les professeurs du département doivent connaître et avoir accès aux sources bibliographiques susceptibles de favoriser une intégration réussie de la technologie à l'enseignement.

Terminons l'énumération des besoins par des éléments spécifiques au calculateur graphique TI-85. Les professeurs du département doivent devenir familiers avec le fonctionnement du TI-85 et en contrôler plusieurs facettes. Ils doivent être capables de produire des activités pédagogiques utilisant le TI-85 favorisant l'atteinte des objectifs de notre discipline ainsi que ceux du programme. Ils doivent aussi pouvoir utiliser le logiciel LINK assurant la liaison entre le calculateur et un ordinateur personnel pour faciliter la préparation d'activités pédagogiques ou la production de matériel didactique. Finalement, ils doivent pouvoir utiliser le View Screen, qui est en fait un rétroprojecteur couplé à un TI-85, soit pour des démonstrations en classe, soit pour faciliter l'apprentissage du TI-85.

Nous devons préparer avec soin l'implantation du calculateur graphique prévue au semestre Automne 95 et la mise sur pied d'un programme de formation devient impérative.

4.2 Formation acquise par les auteurs du projet

Le PROJET AROMATH nous a permis de consulter une bonne quantité d'ouvrages portant sur l'utilisation des technologies en enseignement des mathématiques. Nos lectures nous ont permis de dégager une certaine vision de l'utilisation des technologies dans l'enseignement des mathématiques et ont fourni des exemples concrets, des idées réalisables à court terme dans une classe. Parallèlement à la recherche bibliographique, nous nous sommes initiés au fonctionnement des calculateurs graphiques HP-48G et TI-85. Pour cela, nous avons étudié les guides d'utilisation des calculateurs et des manuels d'éditeurs indépendants proposant l'utilisation de ces instruments pour traiter de sujets mathématiques précis.

Ensuite, nous avons expérimenté plusieurs activités découvertes au fil des nos lectures, réactualisé (dans le contexte technologique actuel) maints problèmes ou activités d'exploration développés antérieurement au projet puis, développé une douzaine d'activités inédites en vue d'une démonstration ultérieure. Tout au long de cette formation, nous avions une préoccupation constante: essayer d'appliquer à notre enseignement chaque nouvelle fonction apprise sur le calculateur. C'est précisément dans cet esprit, comme soutien à l'enseignement, que nous proposons au département le programme de formation suivant. Le défi est de taille et avec des conditions de travail adéquates, c'est un défi que nous sommes prêts à relever.

4.3 Programme de formation de nos collègues: phase 1

Les objectifs particuliers de formation et les activités reliées

Au terme du programme de formation, le participant devra avoir atteint les objectifs suivants au moyen des activités proposées.

Objectif 1
Reconnaître l'impact de la technologie sur la discipline mathématiques, notamment sur les contenus des cours.

Objectif 2
Reconnaître l'impact de la technologie sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Activité
Amorcer un échange autour des premières sections du chapitre 1 "Un virage technologique en mathématiques... encore un?" et du chapitre 5 "Perspectives" du rapport d'étape du PROJET AROMATH et poursuivre la discussion en s'inspirant de la lecture des textes de Bernard Cornu (*L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*), Thomas P. Dick (*Super calculators: implications for the calculus curriculum, instruction and assessment*), Gail Burrill (*The graphing calculator: a tool for change*), John Horgan (*The death of proof*), Don Small (*Calculus reform - Laboratories - CAS's*), David A. Smith (*Questions for the future: what about the horse?*), Lynn Arthur Steen (*The science of patterns*), Hugh Burkhardt (*An overview*), Bernard Hodgson et Eric Muller (*The impact of symbolic mathematical systems on mathematical education*).

Objectif 3
Développer une habileté à utiliser les capacités graphiques, numériques et symboliques du calculateur TI-85 ainsi que son langage de programmation dans des contextes mathématiques de niveau collégial.

Objectif 4
Utiliser le matériel d'appoint du calculateur TI-85: le câble de communication (de calculateur à calculateur), le "View Screen" (tandem calculateur-rétroprojecteur) et le logiciel "LINK" (de calculateur à ordinateur et vice-versa).

Activité
Dans le cadre de PERFORMA, participer à des ateliers de formation élaborés par les auteurs du projet. Après la description des objectifs et des activités rattachées, on trouvera une description détaillée de ce programme.

Objectif 5
Identifier les objectifs des cours de mathématiques et du programme de Sciences de la nature dont l'atteinte est facilitée par l'utilisation d'un calculateur graphique.

Activité
Participer à une discussion sur la section "Aspects positifs de l'intégration des technologies à l'enseignement" du rapport d'étape du PROJET AROMATH. Cette section comporte les thèmes "L'apprentissage", "L'intégration des apprentissages", "La visualisation", "La démarche mathématique de l'étudiant", et "L'apprentissage coopératif".

Objectif 6
Dégager des critères caractérisant les activités productives d'apprentissage réalisées à l'aide du calculateur graphique et mettre à profit ses connaissances du calculateur dans la conception d'une activité de nature pédagogique respectant ces critères.

Activité
Réaliser et présenter une activité de démonstration, d'exploration ou de résolution de problèmes à l'aide du calculateur graphique.

Objectif 7
Prendre conscience des difficultés liées à l'implantation du calculateur graphique dans les cours de mathématiques.

Activité
Prendre connaissance des textes *Reformation at St.Olaf* de Paul D. Humke et *A compass-and-computer perspective on technology* de David Clough Lukens puis partager les difficultés rencontrées lors du programme de formation aux plans technique et affectif.

Objectif 8
Localiser les sources d'information les plus pertinentes à l'enseignement des mathématiques au moyen des technologies.

Activité
- Utiliser les bases de données départementales sur les livres en bibliothèque et les articles de revue en bibliothèque (elles contiennent chacune plus de 400 titres).
- Parcourir les revues *Mathematics Teacher, College Mathematics Journal, Journal of Research in Mathematics, Bulletin de l'Association Mathématique du Québec* relativement aux expérimentations pédagogiques utilisant un calculateur graphique.
- S'abonner (gratuitement) à certains bulletins périodiques d'information tels *TI-Cares* , *T³ (Teachers Teaching with Technology)* , ...

Le contenu

Impact de la technologie sur la discipline mathématiques
Impact de la technologie sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques
Sur le calculateur graphiqueTI-85:

- Les fonctions et les instructions graphiques
- Les fonctions et les instructions numériques
- Les courbes en coordonnées polaires
- Les courbes paramétriques
- Les graphiques des solutions d'équations différentielles
- Les variables
- Les listes (suites)
- Les nombres complexes
- Le calcul différentiel et intégral
- Les probabilités et les statistiques
- Les vecteurs
- Les matrices
- Le "solver"
- La programmation (initiation)
- La gestion de la mémoire
- Les communications calculateur-calculateur
- Le "View Screen"
- Le logiciel "LINK"

Objectifs en mathématiques versus calculateur graphique
Critères d'activités productives d'apprentissage sur calculateur
Difficultés liées à l'implantation du calculateur
Sources pertinentes d'information

Le matériel didactique

De quel matériel didactique disposerons-nous pour bâtir le programme de formation de nos collègues? D'abord, de nombreux éléments bibliographiques à portée générale seront diffusés dans ces cours. Plusieurs de ces éléments seront choisis dans la bibliographie (livres ou articles) apparaissant au chapitre 6 du présent rapport. Ensuite, le guide d'utilisation du TI-85, bien que fort précieux, est plutôt aride et n'offre pas un environnement axé sur le soutien à l'enseignement. Pour corriger cette lacune, il faudrait un guide nettement plus approprié comportant des exemples d'activités réalisables en classe. Ainsi, nous souhaitons produire un "Guide d'activités mathématiques réalisables à l'aide du calculateur graphique TI-85". Dans ce document, les principales fonctions du TI-85 seraient introduites et pourraient être assimilées à l'intérieur d'activités mathématiques signifiantes. Le travail de rédaction requis serait entrepris à la session Automne 94 et se poursuivrait de façon intensive à la session Hiver 95. Avec un dégagement complet à la session Hiver 95, c'est un défi que nous sommes prêts à relever.

Le matériel technologique

Chaque professeur doit posséder son propre calculateur graphique TI-85 pour participer à la formation prévue. La compagnie Addison-Wesley, distributeur exclusif des produits Texas Instruments, offre un calculateur gratuit pour chaque groupe de 25 calculateurs vendus. Annuellement, la nouvelle clientèle en Sciences de la nature tourne autour de 600 étudiants, ce qui nous permet d'entrevoir la disponibilité de près de 25 calculateurs pour les membres du département. De plus, dans le cas d'une éventuelle entente, la compagnie s'est engagée à rembourser les frais déjà encourus à l'achat d'un matériel de projection et à fournir gratuitement un "View Screen" pour chaque groupe de 125 calculateurs vendus. Ces conditions réunies font en sorte que chacun des professeurs du département pourrait posséder son propre calculateur graphique et avoir accès à un parc de "View Screen" suffisant pour les besoins de la première année d'implantation. Et pour ne rien gâcher, ce virage technologique en mathématiques n'impliquerait aucun déboursé pour le Collège.

Le cadre

Il est clair que le professeur devant utiliser le TI-85 en classe voudra suivre la formation que nous allons préparer. Aussi, nous avons cru bon offrir ce programme de formation dans le cadre de Performa. La formation qui sera dispensée est pertinente à notre tâche d'enseignant et s'inscrit fort bien dans l'esprit Performa. De plus, comme incitatif, les professeurs recevront des crédits pour un apprentissage qui apparaît de plus en plus indispensable.

Le calendrier

Nous proposons de planifier le programme de formation pour le semestre Hiver 95 en accord avec la disponibilité des participants. Le programme totaliserait 45 heures de formation et s'échelonnerait tout au long du semestre. La durée des activités reliées à chacun des objectifs s'établit comme suit:

Objectifs 1 et 2:	2	heures,
Objectif 3:	30	heures,
Objectif 4:	3	heures,
Objectif 5:	2	heures,
Objectif 6:	5	heures,
Objectif 7:	3	heures.

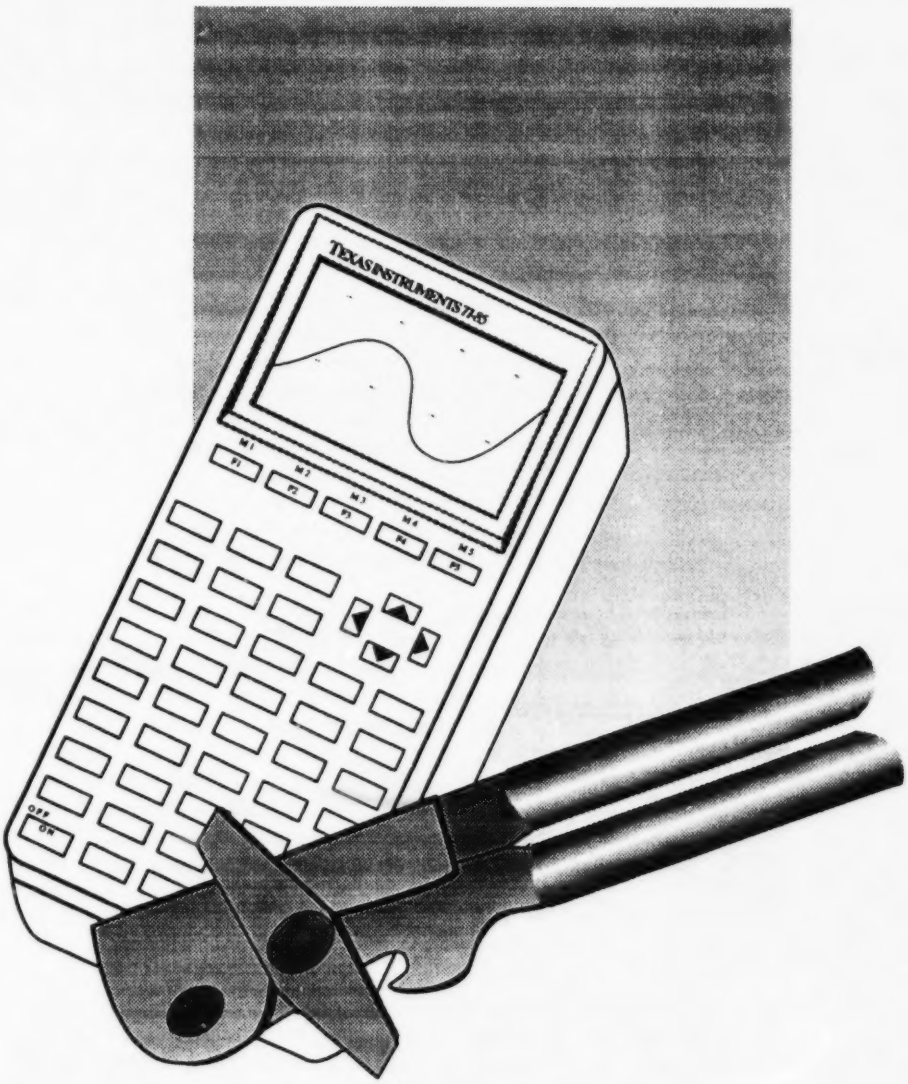
Les personnes-ressources

Les personnes-ressources seront André Reumont et Pierre Reumont.

4.4 Suites au programme: phase 2

L'apprentissage du logiciel de manipulation symbolique qui sera éventuellement choisi est prévu à l'année scolaire 1995-1996.

Perspectives



Chapitre 5

5. PERSPECTIVES

5.1 L'influence des technologies sur la pédagogie

L'intégration des technologies aura un impact important sur plusieurs facettes de notre enseignement. D'abord, nous entrevoyons que, dans la prochaine décennie, le style d'enseignement des mathématiques sera profondément modifié. Pour le professeur ainsi que pour l'étudiant, ces modifications devront se faire graduellement. Au début d'une session, il faudra que le professeur renseigne le plus précisément possible l'étudiant des nouvelles attentes qu'il a envers lui, sinon la frustration risque de s'installer de part et d'autre.

Ensuite, le rôle accru que l'on veut confier à l'étudiant dans son apprentissage et l'accent souhaité dans le travail coopératif nous apparaissent irréconciliables avec l'utilisation massive d'une pédagogie axée sur l'enseignement magistral. À cet effet, Aylwin précise:

> Il n'y a qu'un critère global pour juger de l'efficacité d'une pédagogie, c'est la diversité et la qualité des opérations intellectuelles qu'elle suscite chez l'élève, sans lesquelles les apprentissages visés n'auront pas lieu. Or, nous savons que l'exposé magistral, qui a par ailleurs une efficacité qui lui est propre, est une méthode pauvre en termes d'activité intellectuelle chez l'élève, parce que, dans ce cas, c'est l'orateur qui fait l'essentiel du travail, pendant que l'élève s'évertue à essayer de dégager du sens à travers le flot continu de paroles auquel il est soumis.
>
> L'apprentissage coopératif, en revanche, place chaque élève, à chaque instant, au centre de l'activité intellectuelle du cours et aux commandes de sa démarche personnelle d'apprentissage. Il s'agit donc là d'un complément naturel de l'exposé professoral, un complément, d'ailleurs, qui devrait occuper plus d'espace que l'exposé. Il faut également souligner, en rapport avec le point précédent sur la motivation, que le fait de faire sortir l'élève de l'inaction, de l'isolement et de la passivité constitue un facteur déterminant dans le maintien de la motivation. (26)

Pour bien exploiter le potentiel du calculateur graphique et devant le manque de matériel didactique adéquat, il faudra inévitablement que le professeur conçoive des activités à proposer à l'étudiant utilisant le calculateur et favorisant davantage le travail coopératif. Pour cela, il devra développer une compétence à utiliser le calculateur mais aussi, de façon parallèle, une philosophie d'enseignement sous-jacente à cette utilisation. Le travail du professeur sera plus intimement lié à l'apprentissage de l'étudiant. Pour faire image, dans le futur, le professeur devrait se retrouver plus souvent "aux côtés" de l'étudiant que "devant" lui! L'extrait suivant précise cette idée.

> La nature interactive des systèmes de manipulation symbolique change le rôle du professeur en celui d'instructeur et de personne-ressource. En retour, cela déplace l'attention du professeur de l'enseignement vers l'apprentissage de l'étudiant. En particulier, il aura à aider l'étudiant à apprendre à apprendre. Observer les étudiants et travailler avec eux dans un laboratoire renseigne mieux le professeur sur le degré de compréhension de l'étudiant qu'analyser le travail effectué dans une classe conventionnelle. En général, la mise en place d'un laboratoire oblige à la fois le professeur et l'étudiant à échanger plus ouvertement et plus honnêtement sur la démarche d'apprentissage suivie par l'étudiant. Au contraire, les évaluations centrées sur la mémorisation de faits et de techniques fournissent très peu d'informations sur la façon dont l'étudiant aborde un problème. (27)

En bref, de nouvelles tâches incomberont aux professeurs: mettre sur pied des activités avec calculateur qui seront signifiantes pour l'étudiant, animer les groupes de travail durant le déroulement de ces activités, soutenir et encourager l'initiative des étudiants, formaliser les résultats escomptés et mettre en évidence la démarche utilisée. Tout cela fera que l'étudiant développera une image plus globale, plus signifiante et plus réaliste de l'activité mathématique. Pour terminer ce thème, laissons la parole à Don Small:

> Allons-nous être des joueurs actifs ou allons-nous observer le tout des lignes de côté? Nous avons souvent dit à nos étudiants que "les mathématiques ne sont pas un sport de spectateurs". Le développement rapide de la technologie et le mouvement de réforme en calcul posent comme défi aux professeurs un énoncé similaire, "l'enseignement n'est pas un sport de présentation". (28)

5.2 L'influence des technologies sur les contenus

On peut prévoir une remise en question de certains contenus. Par exemple, on doit réévaluer le temps consacré à l'apprentissage d'algorithmes de calcul, tels celui d'un déterminant, l'inversion d'une matrice, la méthode de Gauss, les méthodes élaborées d'intégration... À quel moment, peut-on permettre à l'étudiant d'utiliser un calculateur pour effectuer des calculs de ce type? En statistiques, par exemple, l'étudiant apprend à calculer "papier-crayon" une moyenne, un écart-type, une cote z... mais, une fois ces concepts acquis, on lui permet l'accès à des outils technologiques pour réaliser ses calculs et s'attaquer à des problèmes plus globaux tels, l'estimation et les tests d'hypothèses. Cette démarche est reconnue d'emblée. Pourtant, localement, elle n'a pas encore été imitée dans les autres cours. Nous ne pourrons esquiver encore longtemps la problématique de la technologie dans nos cours. Selon John A. Dossey:

> Nous avons dérivé vers un curriculum par défaut, un curriculum aux attentes minimales résistant aux changements requis permettant de répondre aux demandes de préparation des étudiants à la vie contemporaine. (29)

Il faudra trouver des réponses aux questions soulevées par la présence technologique car, bientôt... ce sera l'étudiant qui nous les posera!

5.3 L'influence des technologies sur l'évaluation

La présence dans le programme de Sciences de la nature d'objectifs de haut niveau tant sur le plan de la formation fondamentale que celui de la formation scientifique nous amène à repenser nos approches pédagogiques et les intégrer à une vision plus globale. L'introduction de la technologie dans l'environnement d'apprentissage de l'élève est une ouverture en ce sens car elle déplace l'accent d'objectifs d'ordre technique vers des habiletés fondamentales de plus haut niveau.

Cela amène aussi des conséquences sur le processus d'évaluation. Nous croyons que l'évaluation doit s'harmoniser à l'apprentissage; la technologie doit donc s'intégrer au processus d'évaluation. Or, une des objections à l'utilisation des technologies en classe est: "L'étudiant n'aura qu'à presser un bouton pour répondre aux questions d'examen.". Le syndrome du "boutonneux", pardon du "pitonneux" (les adolescents sont parfois susceptibles!) est encore bien présent. Mais cette objection présume faussement que nous allons demander à l'étudiant d'exécuter exactement les mêmes tâches que maintenant. Ça ne devrait pas être le cas.

Pour illustrer notre propos, voici un exemple frappant. Aux États-Unis, on a réalisé que les examens nationaux de niveau secondaire en mathématiques comportait presqu'exclusivement des questions techniques auxquelles on peut répondre rapidement avec un calculateur bas de gamme. Évidemment, le calculateur n'était pas autorisé. On peut se questionner sur la valeur de ces apprentissages. D'ailleurs, depuis ce temps, ces examens ont été modifiés afin de faire place à l'utilisation du calculateur et à la mesure d'habiletés de haut niveau, en particulier la compétence en résolution de problèmes. À la sortie d'un cours, tout étudiant devrait pouvoir dire qu'il a appris à faire des choses qu'un calculateur ne peut faire. L'extrait suivant, d'un rapport du Mathematical Association of America, développe bien cette position.

> Nous exigeons une meilleure compréhension et une pensée critique, mais nos questions d'examen scrutent des processus routiniers de calcul dénotés par les verbes "résoudre", "tracer", "évaluer", "calculer", "dériver", "intégrer", "inverser", etc. ... précisément ces procédés mécaniques où les systèmes de manipulation symbolique sont à leur meilleur. Demander à l'étudiant "énoncer et prouver" peut aussi montrer une piètre compréhension de ce qui a été mémorisé. Un premier pas afin de réduire la disparité entre nos buts éducatifs et nos objectifs d'évaluation serait de commencer à utiliser des questions d'examen comportant les verbes "définir et illustrer", "expliquer", "exprimer", "décrire", "comparer", "justifier", "interpréter", etc. ... actions qui transcendent ou prolongent les processus de première main des systèmes de manipulation symbolique. (30)

Dans nos examens, il faudrait arriver à exiger la réalisation de tâches permettant de mesurer comme maintenant certaines habiletés techniques mais aussi l'intégration des connaissances et la compétence en résolution de problèmes. Nous convenons qu'il restera toujours une place pour de l'évaluation d'aspect plus traditionnel. Par exemple, l'élève doit atteindre un niveau d'habileté minimale dans les techniques "papier-crayon" et nous ne le contestons pas. Dans ce cas, peut-on penser à une partie de l'évaluation où l'usage des outils technologiques est interdit? Il n'est probablement pas nécessaire qu'un étudiant sache évaluer l'intégrale de $\sec^5 x$ mais il devrait certainement connaître l'intégrale de x^3. Dans ce contexte, il faudra établir le seuil d'habileté minimale que doivent atteindre nos étudiants dans certaines procédures "papier-crayon".

Dans d'autres activités d'évaluation, il faudrait permettre l'utilisation du calculateur à l'étudiant. Alors, celui-ci étant libéré des tâches techniques, des situations plus réalistes de problèmes peuvent lui être présentées. L'étudiant peut alors se concentrer sur la sélection de ses stratégies de résolution de problèmes et sur l'utilisation de ses connaissances dans les diverses étapes de sa démarche. Sa compétence en résolution de problèmes et sa capacité à intégrer ses connaissances sont mises en relief et deviennent ainsi moins difficiles à évaluer. De plus, selon Don Small, il y a là une occasion pour réaffirmer une nouvelle vision des mathématiques:

> Une chose est certaine, la perception des mathématiques que se fait l'étudiant, fondée en premier lieu sur les "calculs à main" ne sera pas modifiée tant que les calculateurs et les ordinateurs ne seront pas permis aux évaluations. (31)

Dans le contexte actuel des examens en classe de deux heures, il reste que la mesure d'habiletés de haut niveau nous apparaît difficilement réalisable. On peut penser à des travaux faits hors des heures de classe, à des projets (individuels ou en équipe) où le contexte de réalisation nous semble plus réaliste. Il faudra chercher à diversifier les moyens d'évaluation et c'est une responsabilité départementale de s'attaquer à cette tâche.

5.4 L'intégration des technologies: un défi à relever

À long terme, la présence des technologies dans nos cours fera surgir bien des interrogations:

- L'étudiant perdra-t-il trop d'habiletés de type "papier-crayon"?
- L'étudiant développera-t-il une confiance irréaliste en des outils de calculs et d'illustration limités?
- Comment développer chez l'étudiant un sens critique dans le choix et l'utilisation des moyens: calculateur (numérique), calculateur (graphique), ordinateur (symbolique), "papier-crayon"?
- Quelle sera la place de la programmation?
- Quelle sera l'attitude de l'étudiant lors de l'introduction du calculateur dans son apprentissage?
- Quelle sera la rôle du calculateur dans l'examen synthèse?...
- Dans quelle mesure faudra-t-il modifier les contenus? l'ordre des concepts?
- Avec quel rythme et de quelle manière l'apprentissage du calculateur pourra-t-il se faire?

À notre avis, un calculateur graphique et un logiciel de manipulation symbolique offrent un énorme potentiel sur le plan pédagogique. Par ailleurs, la réalisation de ce potentiel devra s'échelonner sur plusieurs années et demandera une réelle ténacité et une bonne dose d'imagination. L'extrait suivant appuie ce propos.

> Enseigner avec des moyens technologiques n'est pas plus facile, au contraire. À court terme, c'est plus difficile et cela demande plus de temps. Par exemple, plusieurs des exercices routiniers dans les textes habituels de calcul n'ont plus aucune signification pour un étudiant muni d'un logiciel de manipulation symbolique; celui-ci exige plus que presser des touches. Des problèmes imaginatifs, ouverts sont d'autre part plus difficiles à créer: trouver le juste équilibre entre désabuser les étudiants avec des directives style "livre de cuisine" et les mystifier avec de vagues généralités est étonnamment difficile. La morale: soyez réalistes. (32)

Comme vous pouvez le constater, le travail départemental sera exigeant et c'est pourquoi il faut tenter d'alléger le travail d'appropriation de cette technologie par les professeurs. Le PROJET AROMATH a permis de déblayer le terrain et d'ouvrir de nouveaux horizons. Il offre aux professeurs d'acquérir une nouvelle formation dans des conditions raisonnables. Plus que jamais, il faudra avoir une ouverture d'esprit face aux changements envisagés, s'appuyer les uns, les autres par un réel travail d'équipe et s'encourager mutuellement. Collectivement et individuellement, nous estimons que les années qui viennent seront les plus passionnantes de notre carrière et en tant que département, il faudrait se dire à l'instar de Diane Dufresne: "faut qu'il y en ait une qui le fasse, pi je donnerai pas ma place!".

Bibliographie

Chapitre 6

6. BIBLIOGRAPHIE

6.1 Livres

Beckmann, Charlene E. & Sundstrom, Theodore A. (1992). *Exploring calculus with a graphing calculator.* Addison-Wesley.

Burrill, Gail & Hopfensperger, Patrick (1993). *Exploring statistics with the TI-81®.* Addison-Wesley.

Cornu, Bernard (ed.) (1992). *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques.* Paris, PUF.

Cornu, Bernard & Ralston, Anthony (ed.) (1992). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching.* Paris, Unesco.

Devaney, Robert L. (1990). *Chaos, fractals and dynamics: computer experiments.* Addison-Wesley.

Edwards, Charles H. (1986). *Calculus and the personal computer.* Prentice-Hall.

Embse, Charles V., Olmstead, Eugene (1993). *Exploring algebra with the TI-81®.* Addison-Wesley.

Fey, James T. (ed.) (1992). *Calculators in Mathematics Education (NCTM Yearbook 1992)* . National Council of Teachers of Mathematics.

Harvey, John G. & Kenelley, John W. (1993). *Explorations with the Texas Instruments TI-85.* Academic Press.

Karian, Zaven A. (ed.) (1992). *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education.* MAA Notes Number 24, The Mathematical Association of America.

Leinbach, Carl L. et al. (ed.) (1991). *The laboratory approach to teaching calculus.* MAA Notes Number 20, The Mathematical Association of America.

Murdock, Jerald, Kamischke, Ellen & Kamischke, Eric (1993). *Graphing Calculator Enhanced Algebra Project - Algebra II.* National Science Foundation.

Smith, David. A et al. (ed.) (1988). *Computers and Mathematics: The Use of Computers in Undergraduate Instruction.* MAA Notes Number 9, The Mathematical Association of America.

Smith, Robert T. & Minton, Roland B. (1993). *Discovering Calculus with the TI-81 and the TI-85.* McGraw-Hill.

Solow, Anita (ed.) (1993). *Learning by discovery, A Lab Manual For Calculus, Volume 1.* MAA Notes Number 27, The Mathematical Association of America.

Steen, Lynn Arthur (ed.) (1988). *Calculus for a New Century.* MAA Notes Number 8, The Mathematical Association of America.

Texas Instruments (1993). *TI-85 Graphics Calculator - Guidebook.*

Tucker, Thomas W. (ed.) (1990). *Priming the calculus pump.* MAA Notes Number 17, The Mathematical Association of America.

Zimmerman, W. & Cunningham, D. (ed.) (1990). *Visualization in teaching and learning mathematics.* MAA Notes Number 19, The Mathematical Association of America.

6.2 Articles de revue

Demana, Franklin & Waits, Bert K. (1992). A case against symbolic manipulation in school mathematics today. *Mathematics Teacher*, vol. 85, no 3, p. 180.

Demana, Franklin & Waits, Bert K. (1992). A computer for all students. *Mathematics Teacher*, vol. 85, no 2, p. 94.

Demana, Franklin & Waits, Bert K. (1990). The role of technology in teaching mathematics. *Mathematics Teacher*, vol. 83, no 1, p. 27.

Dion, Gloria (1990). The graphics calculator: a tool for critical thinking. *Mathematics Teacher*, vol. 83, no 7, p. 564.

Heid, Kathleen M. (1989). How symbolic mathematical systems could and should affect precollege math. *Mathematics Teacher*, vol. 82, no 6, p. 410.

Horgan, John. (1993).The Death of Proof. *Scientific American*, October 1993, p. 92.

Kenelly, John. (1990). Using calculators in standardized testing of mathematics. *Mathematics Teacher*, vol. 83, no 9, p. 716.

Long, Vena M. & Reeves, Charles A. (1992). Seed a Graphing Calculator Farm. *Mathematics Teacher*, vol. 85, no 6, september 1992, p. 497.

Mercer, Joseph (1992). What is left to teach if students can use calculators? *Mathematics Teacher*, vol. 85, no 6, p. 415.

Reys, Robert E. & Reys, Barbara J. (1993). Graphing calculators. *Mathematics Teacher*, vol. 86, no 3, p. 261.

Steen, Lynn Arthur (1988). The Science of Patterns. *Science*, vol. 240, april 1988, p. 611.

Wilson, David L. (1992). Electronic Calculators Fill a Niche in Many Mathematics Classes. *The Chronicle of Higher Education*, Dec. 16, 1992, p. A14.

6.3 Renvois bibliographiques

1) Steen, Lynn Arthur (1988). The Science of Patterns. *Science*, vol. 240, april 1988, p. 612.

2) Steen, Lynn Arthur (1992). Living with a new mathematical species. *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Unesco, Paris, p. 33.

3) Burkhardt, Hugh & Fraser, Rosemary (1992). An overview. *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Unesco, Paris, p.1.

4) Smith, David A. (1992). Questions for the Future: What about the horse? *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education*. MAA Notes Number 24, The Mathematical Association of America, p. 1.

5) Ibid, p. 2.

6) Reys, Robert E. & Reys, Barabara, J. (1993). Graphing calculators. *The Mathematics Teacher*, vol. 86, no 3, p. 261.

7) Smith, David A. (1992). Questions for the Future: What about the horse? *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education*. MAA Notes Number 24, The Mathematical Association of America, p. 2.

8) Cayrol A. & De Saint-Paul, J. (1984). *Derrière la magie*. Paris: InterÉditions.

9) Tall, David (1992). Mathematical Processes and Symbols in the Mind. *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education*. MAA Notes Number 24, The Mathematical Association of America, p. 63.

10) Zimmerman, W. & Cunningham, D. (1990). *Visualization in teaching and learning mathematics*. MAA Notes Number 19, The Mathematical Association of America, p. 4.

11) Zimmerman, W. & Cunningham, D. (1990). *Visualization in teaching and learning mathematics*. MAA Notes Number 19, The Mathematical Association of America, p. 1.

12) Small, Don (1991). Calculus Reform - Laboratories - CAS's.*The laboratory approach to teaching calculus*. MAA Notes Number 20, The Mathematical Association of America, p. 12.

13) Zimmerman, W. & Cunningham, D. (1990). *Visualization in teaching and learning mathematics*. MAA Notes Number 19, The Mathematical Association of America, p. 3.

14) Zimmerman, W. & Cunningham, D. (1990). *Visualization in teaching and learning mathematics*. MAA Notes Number 19, The Mathematical Association of America, p. 105.

15) Burkhardt, Hugh & Fraser, Rosemary (1992), An overview. *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Unesco, Paris, p.5.

16) Aylwin, Ulric (1994). Le travail en équipe: pourquoi et comment? *Pédagogie collégiale*, mars 94, vol. 7, no 3, p. 29.

17) Ibid.

18) Small, Don (1991). Calculus Reform - Laboratories - CAS's. *The laboratory approach to teaching calculus*. MAA Notes Number 20, The Mathematical Association of America, p. 10.

19) Smith, David A. (1992). Questions for the Future: What about the horse? *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education*. MAA Notes Number 24, The Mathematical Association of America, p. 1.

20) Burkhardt, Hugh & Fraser, Rosemary (1992). An overview. *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Paris, Unesco, p. 5.

21) Steen, Lynn Arthur (1992). Living with a new mathematical species. *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Unesco, Paris, p. 36.

22) Aylwin, Ulric (1994). Le travail en équipe: pourquoi et comment? *Pédagogie collégiale*, mars 94, vol. 7, no 3, p. 30.

23) Reumont, André & Reumont, Pierre (1991). PROJET MATHÉTACTIQUES. Collège de Maisonneuve, p. 3-28.

24) Long, Vena M. & Reeves, Charles A. (1992). Seed a Graphing Calculator Farm. *Mathematics Teacher*, vol. 85, no 6, p. 497.

25) Reumont, André & Reumont, Pierre (1993). *Demande de subvention du PROJET AROMATH soumis à la D.G.E.C.*

26) Aylwin, Ulric (1994). Le travail en équipe: pourquoi et comment? *Pédagogie collégiale*, mars 94, vol. 7, no 3, p. 30.

27) Small, Don (1991). Calculus Reform - Laboratories - CAS's.*The laboratory approach to teaching calculus*. MAA Notes Number 20, The Mathematical Association of America, p. 10.

28) Ibid, p. 13.

29) National Research Council (1989). *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education.* Washington, D.C.: National Academy Press, p. 74.

30) Smith, David A. (1992). Questions for the Future: What about the horse? *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education.* MAA Notes Number 24, The Mathematical Association of America, p. 4.

31) Small, Don (1991). Calculus Reform - Laboratories - CAS's.*The laboratory approach to teaching calculus*. MAA Notes Number 20, The Mathematical Association of America, p. 13.

32) Zorn, Paul (1992). *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education.* MAA Notes Number 24, The Mathematical Association of America, p. 27.